

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по учебной работе

_____ / О.В. Юсупова

" ____ " _____ 20__ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.О.03.03 «Дискретная математика»

| | |
|---|--|
| Код и направление подготовки (специальность) | 01.03.02 Прикладная математика и информатика |
| Направленность (профиль) | Прикладная математика и информатика |
| Квалификация | Бакалавр |
| Форма обучения | Очная |
| Год начала подготовки | 2022 |
| Институт / факультет | Институт автоматизации и информационных технологий |
| Выпускающая кафедра | кафедра "Прикладная математика и информатика" |
| Кафедра-разработчик | кафедра "Прикладная математика и информатика" |
| Объем дисциплины, ч. / з.е. | 180 / 5 |
| Форма контроля (промежуточная аттестация) | Зачет, Экзамен |

Б1.О.03.03 «Дискретная математика»

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) **01.03.02 Прикладная математика и информатика**, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от № 9 от 10.01.2018 и соответствующего учебного плана.

Разработчик РПД:

Доцент, кандидат физико-математических наук, доцент
(должность, степень, ученое звание)

А.П Котенко

(ФИО)

Заведующий кафедрой

В.П. Радченко, доктор физико-математических наук, профессор

(ФИО, степень, ученое звание)

СОГЛАСОВАНО:

Председатель методического совета факультета / института (или учебно-методической комиссии)

Я.Г Стельмах, кандидат педагогических наук

(ФИО, степень, ученое звание)

Руководитель образовательной программы

В.П. Радченко, доктор физико-математических наук, профессор

(ФИО, степень, ученое звание)

Содержание

| | |
|--|----|
| 1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы | 4 |
| 2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы | 5 |
| 3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся | 6 |
| 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам), с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий | 7 |
| 4.1 Содержание лекционных занятий | 7 |
| 4.2 Содержание лабораторных занятий | 9 |
| 4.3 Содержание практических занятий | 9 |
| 4.4. Содержание самостоятельной работы | 11 |
| 5. Перечень учебной литературы и учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю) | 12 |
| 6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения | 13 |
| 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем | 13 |
| 8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю) | 14 |
| 9. Методические материалы | 14 |
| 10. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) | 16 |

**1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю),
соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной
программы**

| Наименование категории (группы) компетенций | Код и наименование компетенции | Код и наименование индикатора достижения компетенции | Результаты обучения (знать, уметь, владеть, соотнесенные с индикаторами достижения компетенции) |
|---|---|---|---|
| Общепрофессиональные компетенции | | | |
| Теоретические и практические основы профессиональной деятельности | ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат связанный с прикладной математикой и информатикой | Знать основные понятия, факты, концепции, принципы дискретной математики, связанные с прикладной математикой и информатикой. |
| | | ОПК-1.2 Умеет выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук; применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач | Уметь выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учётом основных понятий и общих закономерностей дискретной математики; применять фундаментальные знания, полученные в области дискретной математики к решению конкретных задач профессиональной деятельности. |
| Универсальные компетенции | | | |
| Системное и критическое мышление | УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1 Знает принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов | Знать принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов на основе методов дискретной математики. |

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | УК-1.2 Умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач | Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения профессиональных задач, осуществлять критический анализ и синтез информации с помощью алгоритмов дискретной математики. |
|--|--|--|--|

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы: **базовая часть**

| Код компетенции | Предшествующие дисциплины | Параллельно осваиваемые дисциплины | Последующие дисциплины |
|-----------------|---|---|---|
| ОПК-1 | Алгебра и геометрия; Математическая логика; Математический анализ | Алгебра и геометрия; Дифференциальная геометрия и тензорная алгебра; Дифференциальные уравнения; Математический анализ | Вариационное исчисление; Выполнение и защита выпускной квалификационной работы; Дифференциальные уравнения; История прикладной математики и информатики; Комплексный анализ; Математический анализ; Операционное исчисление; Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена; Производственная практика: научно-исследовательская работа (распределенная); Теория вероятностей и математическая статистика; Уравнения математической физики; Учебная практика: научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы); Функциональный анализ |

| | | | |
|------|---|---|---|
| УК-1 | Алгебра и геометрия; Информационные технологии и программирование; Математическая логика; Математический анализ; Правоведение; Учебная практика: проектная практика | Алгебра и геометрия; Дифференциальная геометрия и тензорная алгебра; Дифференциальные уравнения; Математический анализ; Математическое моделирование в естествознании; Учебная практика: проектная практика | Вариационное исчисление; Выполнение и защита выпускной квалификационной работы; Дифференциальные уравнения; История прикладной математики и информатики; Комплексный анализ; Математические модели механики сплошных сред; Математические основы методов защиты информации; Математический анализ; Математическое моделирование в естествознании; Методы оптимизации; Операционное исчисление; Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена; Производственная практика: научно-исследовательская работа; Производственная практика: научно-исследовательская работа (рассредоточенная); Производственная практика: преддипломная практика; Теория вероятностей и математическая статистика; Учебная практика: научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы); Учебная практика: проектная практика; Функциональный анализ |
|------|---|---|---|

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

| Вид учебной работы | Всего часов / часов в электронной форме | 2 семестр часов / часов в электронной форме | 3 семестр часов / часов в электронной форме |
|--|---|---|---|
| Аудиторная контактная работа (всего), в том числе: | 80 | 32 | 48 |
| Лекции | 32 | 16 | 16 |
| Практические занятия | 48 | 16 | 32 |
| Внеаудиторная контактная работа, КСР | 5 | 2 | 3 |
| Самостоятельная работа (всего), в том числе: | 68 | 38 | 30 |
| выполнение задач, заданий, упражнений (в том числе разноуровневых) | 17 | 14 | 3 |
| подготовка к зачету | 5 | 5 | 0 |

| | | | |
|------------------------------------|-----|----|-----|
| подготовка к лекциям | 10 | 5 | 5 |
| подготовка к практическим занятиям | 20 | 10 | 10 |
| составление конспектов | 8 | 4 | 4 |
| подготовка к экзамену | 8 | 0 | 8 |
| Контроль | 27 | 0 | 27 |
| Итого: час | 180 | 72 | 108 |
| Итого: з.е. | 5 | 2 | 3 |

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам), с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

| № раздела | Наименование раздела дисциплины | Виды учебной нагрузки и их трудоемкость, часы | | | | |
|-----------|---------------------------------|---|----|----|-----|-------------|
| | | ЛЗ | ЛР | ПЗ | СРС | Всего часов |
| 1 | Графы | 4 | 0 | 4 | 8 | 16 |
| 2 | Приложения графов | 4 | 0 | 4 | 12 | 20 |
| 3 | Комбинаторика | 4 | 0 | 4 | 6 | 14 |
| 4 | Коды | 4 | 0 | 4 | 12 | 20 |
| 5 | Специальные приложения графов | 16 | 0 | 32 | 30 | 78 |
| | КСР | 0 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| | Контроль | 0 | 0 | 0 | 0 | 27 |
| | Итого | 32 | 0 | 48 | 68 | 180 |

4.1 Содержание лекционных занятий

| № занятия | Наименование раздела | Тема лекции | Содержание лекции (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов) | Количество часов / часов в электронной форме |
|------------------|----------------------|------------------------------------|---|--|
| 2 семестр | | | | |
| 1 | Графы | Основные определения теории графов | Вершины, рёбра, дуги, инцидентность. (Не)орграфы. Матрицы смежности вершин, рёбер (дуг), инцидентности. Полные, 2-дольные, многодольные графы. Размеченные и взвешенные графы. Петли, пути, маршруты, циклы. Дерево, лес. | 2 |

| | | | | |
|--------------------------|-------------------------------|--|--|-----------|
| 2 | Графы | Метрические и топологические характеристики графов | Метрики на графе. Эксцентриситет, радиус, диаметр, центр, периферия графа. Остов графа. Базис циклов, цикломатическое число. Независимые, доминирующие множества вершин и рёбер неорграфа. Клики вершин. | 2 |
| 3 | Приложения графов | Конечные автоматы | Определение (не)детерминированных конечных автоматов. 3 представления КА. Примеры КА. | 2 |
| 4 | Приложения графов | Функциональные схемы | Теория функциональных схем. Основные схемы. Примеры составных схем. | 2 |
| 5 | Комбинаторика | Основные определения и алгоритмы комбинаторики | Основные определения комбинаторики. (Не)упорядоченные выборки. Перестановки, размещения, сочетания. Биномиальные и полиномиальные коэффициенты. Формулы Ньютона. Правила сложения и умножения. | 2 |
| 6 | Комбинаторика | Примеры задач комбинаторики | Применение формул комбинаторики. | 2 |
| 7 | Коды | Основные понятия теории кодирования | Коды. (Де)кодирование. Разделимые коды. Двоичное кодирование. Побуквенное кодирование. Пре- и постфиксные коды. Кодовое дерево. Оптимальные коды. Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. | 2 |
| 8 | Коды | Примеры кодировок в программировании | Код Фано. Код Хемминга. | 2 |
| Итого за семестр: | | | | 16 |
| 3 семестр | | | | |
| 9 | Специальные приложения графов | Конечные автоматы для транспортных сетей | Аксиоматика транспортной сети в (не)детерминированной постановке. Примеры постановок задач. Анализ и синтез КА для транспортной сети. | 2 |
| 10 | Специальные приложения графов | Потоки в сетях | Аксиоматика потока в транспортной сети в (не)детерминированной постановке. Примеры постановок задач. | 2 |
| 11 | Специальные приложения графов | Алгоритм Форда-Фалкерсона | Матричное оформление алгоритма Форда-Фалкерсона. Статистические задачи для алгоритма Форда-Фалкерсона. Примеры. | 2 |
| 12 | Специальные приложения графов | Задачи сетевого планирования и управления | Аксиоматика задач СПУ в (не)детерминированной постановке. Примеры постановок задач. Анализ и синтез орграфа задачи СПУ. | 2 |
| 13 | Специальные приложения графов | Оптимизация на графах задач СПУ | Примеры постановок оптимизационных задач СПУ в (не)детерминированной постановке. | 2 |

| | | | | |
|--------------------------|-------------------------------|--|---|-----------|
| 14 | Специальные приложения графов | Оптимизационные задачи на булеане множества вершин графа | Примеры оптимизационных задач на булеане множества вершин графа в (не)детерминированной постановке. | 2 |
| 15 | Специальные приложения графов | Оптимизационные задачи логистики на графах | Примеры оптимизационных задач логистики на графах в (не)детерминированной постановке. | 2 |
| 16 | Специальные приложения графов | Оптимизация кодов | Примеры оптимизации кодов. | 2 |
| Итого за семестр: | | | | 16 |
| Итого: | | | | 32 |

4.2 Содержание лабораторных занятий

Учебные занятия не реализуются.

4.3 Содержание практических занятий

| № занятия | Наименование раздела | Тема практического занятия | Содержание практического занятия (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов) | Количество часов / часов в электронной форме |
|------------------|----------------------|--|---|--|
| 2 семестр | | | | |
| 1 | Графы | Основные определения теории графов | Матрицы смежности вершин, рёбер (дуг), инцидентности (не)орграфов. Свойства полных, 2-дольных и многодольных графов. Петли, пути, маршруты, циклы. Примеры деревьев. | 2 |
| 2 | Графы | Метрические и топологические характеристики графов | Матричные алгоритмы расчёта метрик на (не)орграфе. Эксцентриситет, радиус, диаметр, центр, периферия графа. Матричный алгоритм построения базиса циклов неорграфа. Характеристики max и наибольших независимых, min и наименьших доминирующих множеств вершин и рёбер неорграфа. max и наибольшие клики вершин. | 2 |
| 3 | Приложения графов | Конечные автоматы | Эквивалентность 3 представлений КА. Примеры КА. Оптимизационные задачи для КА. | 2 |
| 4 | Приложения графов | Функциональные схемы | Основные функциональные схемы. Примеры составных схем арифметико-логических операторов. | 2 |
| 5 | Комбинаторика | Примеры задач комбинаторики | Вычисление мощности (не)упорядоченных выборок, перестановок, размещений и сочетаний. Правила сложения и умножения. | 2 |
| 6 | Комбинаторика | Примеры задач комбинаторики | Формулы для биномиальных и полиномиальных коэффициентов. | 2 |

| | | | | |
|--------------------------|-------------------------------|--|--|-----------|
| 7 | Коды | Примеры кодировок в программировании | Разделимые коды. Двоичное кодирование. Побуквенное кодирование. Пре- и постфиксные коды. Кодовое дерево. Оптимальные коды. Код Фано. | 2 |
| 8 | Коды | Примеры кодировок в программировании | Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. Код Хемминга. | 2 |
| Итого за семестр: | | | | 16 |
| 3 семестр | | | | |
| 9 | Специальные приложения графов | Конечные автоматы для транспортных сетей | Примеры анализа и синтеза КА транспортной сети в детерминированной постановке. | 2 |
| 10 | Специальные приложения графов | Конечные автоматы для транспортных сетей | Примеры анализа и синтеза КА реальной транспортной сети в детерминированной постановке. | 2 |
| 11 | Специальные приложения графов | Конечные автоматы для транспортных сетей | Примеры анализа и синтеза КА транспортной сети в недетерминированной постановке. | 2 |
| 12 | Специальные приложения графов | Алгоритм Форда-Фалкерсона | Примеры матричного оформления алгоритма Форда-Фалкерсона. | 2 |
| 13 | Специальные приложения графов | Алгоритм Форда-Фалкерсона | Примеры статистических задач для алгоритма Форда-Фалкерсона. | 2 |
| 14 | Специальные приложения графов | Алгоритм Форда-Фалкерсона | Матричное оформление статистических задач для алгоритма Форда-Фалкерсона. | 2 |
| 15 | Специальные приложения графов | Задачи сетевого планирования и управления | Примеры постановок задач СПУ в детерминированной постановке. Анализ и синтез орграфа задачи СПУ. | 2 |
| 16 | Специальные приложения графов | Задачи сетевого планирования и управления | Примеры постановок задач СПУ в недетерминированной постановке. | 2 |
| 17 | Специальные приложения графов | Оптимизация на графах задач СПУ | Примеры постановок оптимизационных задач СПУ в детерминированной постановке. | 2 |
| 18 | Специальные приложения графов | Оптимизация на графах задач СПУ | Примеры постановок оптимизационных задач СПУ в недетерминированной постановке. | 2 |
| 19 | Специальные приложения графов | Оптимизационные задачи на булеане множества вершин графа | Примеры оптимизационных задач на булеане множества вершин (не)орграфа в детерминированной постановке. | 2 |
| 20 | Специальные приложения графов | Оптимизационные задачи на булеане множества вершин графа | Примеры оптимизационных задач на булеане множества вершин (не)орграфа в недетерминированной постановке. | 2 |

| | | | | |
|--------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|---|-----------|
| 21 | Специальные приложения графов | Оптимизация задач логистики на графах | Примеры оптимизационных задач логистики на (не)орграфах в детерминированной постановке. | 2 |
| 22 | Специальные приложения графов | Оптимизация задач логистики на графах | Примеры оптимизационных задач логистики на (не)орграфах в недетерминированной постановке. | 2 |
| 23 | Специальные приложения графов | Оптимизация кодов | Примеры оптимизации кодов по стоимости. | 2 |
| 24 | Специальные приложения графов | Оптимизация кодов | Примеры оптимизации кодов по устойчивости к ошибкам. | 2 |
| Итого за семестр: | | | | 32 |
| Итого: | | | | 48 |

4.4. Содержание самостоятельной работы

| Наименование раздела | Вид самостоятельной работы | Содержание самостоятельной работы (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов) | Количество часов |
|----------------------|---|--|------------------|
| 2 семестр | | | |
| Графы | Выполнение задач и упражнений, составление конспектов, подготовка к лекциям и практическим занятиям, подготовка к зачёту. | Матрицы смежности вершин, рёбер (дуг), инцидентности (не)орграфов. Петли, пути, маршруты, циклы. Матричные алгоритмы расчёта метрик на (не)орграфе. Эксцентриситет, радиус, диаметр, центр, периферия графа. Матричный алгоритм построения базиса циклов неорграфа. Характеристики max и наибольших независимых, min и наименьших доминирующих множеств вершин и рёбер неорграфа. max и наибольшие клики вершин. | 8 |
| Приложения графов | Выполнение задач и упражнений, составление конспектов, подготовка к лекциям и практическим занятиям, подготовка к зачёту. | Эквивалентность 3 представлений КА. Примеры КА. Оптимизационные задачи для КА. Примеры составных схем арифметико-логических операторов. | 12 |

| | | | |
|-------------------------------|---|--|-----------|
| Комбинаторика | Выполнение задач и упражнений, составление конспектов, подготовка к лекциям и практическим занятиям, подготовка к зачёту. | Вычисление мощности (не)упорядоченных выборок, перестановок, размещений и сочетаний. Правила сложения и умножения. Формулы для биномиальных и полиномиальных коэффициентов. | 6 |
| Коды | Выполнение задач и упражнений, составление конспектов, подготовка к лекциям и практическим занятиям, подготовка к зачёту. | Разделимые коды. Двоичное кодирование. Побуквенное кодирование. Пре- и постфиксные коды. Кодовое дерево. Оптимальные коды. Код Фано. Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. Код Хемминга. | 12 |
| Итого за семестр: | | | 38 |
| 3 семестр | | | |
| Специальные приложения графов | Выполнение задач и упражнений, составление конспектов, подготовка к лекциям и практическим занятиям, подготовка к экзамену. | Примеры анализа и синтеза КА транспортной сети в (не)детерминированной постановке. Матричное оформление статистических задач для алгоритма Форда-Фалкерсона. Примеры постановок задач СПУ в (не)детерминированной постановке. Примеры оптимизационных задач на булеане множества вершин (не)орграфа в (не)детерминированной постановке. Примеры оптимизационных задач логистики на (не)орграфах в (не)детерминированной постановке. Примеры оптимизации кодов по стоимости и устойчивости к ошибкам. | 30 |
| Итого за семестр: | | | 30 |
| Итого: | | | 68 |

5. Перечень учебной литературы и учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю)

| № п/п | Библиографическое описание | Ресурс НТБ СамГТУ (ЭБС СамГТУ, IPRbooks и т.д.) |
|---------------------|--|--|
| Основная литература | | |
| 1 | Новиков, Ф.А. Дискретная математика для программистов : Учеб.пособие / Ф. А. Новиков .- 3-е изд.- М., Питер, 2009.- 383 с. | Электронный ресурс |

| | | |
|---------------------------|---|--------------------|
| 2 | Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие / С. В. Яблонский .- 5-е изд., стер.- М., Высш. шк., 2008.- 384 с. | Электронный ресурс |
| Дополнительная литература | | |
| 3 | Котенко, А.П. Дискретная математика : учеб. пособие / А. П. Котенко; Самар.гос.техн.ун-т.- Самара, 2010.- 51 с. | Электронный ресурс |
| 4 | Кочетков, П.А. Введение в дискретную математику : Учеб.пособие .- 2-е изд.,доп.и перераб..- М., МГИУ, 2007.- 87 с. | Электронный ресурс |
| 5 | Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов : Учеб.пособие:Пер.с англ. / Под ред.С.А.Кулешова .- 2-е изд.,доп..- М., Техносфера, 2005.- 399 с. | Электронный ресурс |

Доступ обучающихся к ЭР НТБ СамГТУ (elib.samgtu.ru) осуществляется посредством электронной информационной образовательной среды университета и сайта НТБ СамГТУ по логину и паролю.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения

При проведении лекционных занятий используется мультимедийное оборудование.

Организовано взаимодействие обучающегося и преподавателя с использованием электронной ин-формационной образовательной среды университета.

| № п/п | Наименование | Производитель | Способ распространения |
|-------|----------------|--|---------------------------|
| 1 | Acrobat Reader | Adobe Inc. (Зарубежный) | Свободно распространяемое |
| 2 | Astra Linux | ГК Astra Linux (ООО «РусБИТех-Астра») (Отечественный) | Свободно распространяемое |
| 3 | LibreOffice | ГК Astra Linux (ООО «РусБИТех-Астра») (Отечественный) | Свободно распространяемое |

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем

| № п/п | Наименование | Краткое описание | Режим доступа |
|-------|---|---|---------------------------|
| 1 | электронная библиотека трудов сотрудников СамГТУ | http://irbis.samgtu.local/ | Ресурсы открытого доступа |
| 2 | Электронная библиотека трудов сотрудников СамГТУ | http://lib.samgtu.ru | Ресурсы открытого доступа |
| 3 | Электронная библиотека Самарской областной универсальной научной библиотеки | www.lib.smr.ru | Ресурсы открытого доступа |
| 4 | Электронная библиотека образовательных и научных изданий | http://www.iqlib.ru | Ресурсы открытого доступа |

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Лекционные занятия

Материалы курса, размещённые на Яндекс.Диске.

МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

- компьютерные презентации;
- компьютерный класс.

Практические занятия

Материалы курса, размещённые на Яндекс.Диске.

МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

- компьютерные презентации;
- компьютерный класс с выходом в Интернет.

Самостоятельная работа

Индивидуальные домашние задания, размещённые в АИС СамГТУ.

МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Тестирование:

- база тестов, разработанная на кафедре ПМИ;
- база тестов Центра тестирования Минобрнауки РФ;
- программное обеспечение для работы с базами тестов.

Прочее:

- рабочее место преподавателя, оснащённое компьютером с доступом в Интернет;
- рабочие места студентов, оснащённые компьютерами с доступом в Интернет, предназначенные для работы в электронной образовательной среде.

9. Методические материалы

Методические рекомендации при работе на лекции

До лекции студент должен просмотреть учебно-методическую и научную литературу по теме лекции с тем, чтобы иметь представление о проблемах, которые будут разбираться в лекции.

Перед началом лекции обучающимся сообщается тема лекции, план, вопросы, подлежащие рассмотрению, доводятся основные литературные источники. Весь учебный материал, сообщаемый преподавателем, должен не просто прослушиваться. Он должен быть активно воспринят, т.е. услышан, осмыслен, понят, зафиксирован на бумаге и закреплён в памяти. Приступая к слушанию нового учебного материала, полезно мысленно установить его связь с ранее изученным. Следя за техникой чтения лекции (акцент на существенном, повышение тона, изменение ритма, пауза и т.п.), необходимо вслед за преподавателем уметь выделять основные категории, законы и определять их содержание, проблемы, предполагать их возможные решения, доказательства и выводы. Осуществляя такую работу, можно значительно облегчить себе понимание учебного материала, его конспектирование и дальнейшее изучение.

Конспектирование лекции позволяет обработать, систематизировать и лучше сохранить полученную информацию с тем, чтобы в будущем можно было восстановить в памяти основные, содержательные моменты. Типичная ошибка, совершаемая обучающимся, дословное конспектирование речи преподавателя. Как правило, при записи «слово в слово» не остается времени на обдумывание, анализ и синтез информации. Отбирая нужную информацию, главные мысли, проблемы, решения и выводы, необходимо сокращать текст, строить его таким образом, чтобы потом можно было легко в нем разобраться. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых можно будет делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также

подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. С окончанием лекции работа над конспектом не может считаться завершённой. Нужно еще восстановить отдельные места, проверить, все ли понятно, уточнить что-то на консультации и т.п. с тем, чтобы конспект мог быть использован в процессе подготовки к практическим занятиям, зачету, экзамену. Конспект лекции – незаменимый учебный документ, необходимый для самостоятельной работы.

Методические рекомендации при подготовке и работе на практическом занятии

Практические занятия по дисциплине проводятся в целях выработки практических умений и приобретения навыков в решении профессиональных задач.

Рекомендуется следующая схема подготовки к практическому занятию:

1. ознакомление с планом практического занятия, который отражает содержание предложенной темы;
2. проработка конспекта лекции;
3. чтение рекомендованной литературы;
4. подготовка ответов на вопросы плана практического занятия;
5. выполнение тестовых заданий, задач и др.

Подготовка обучающегося к практическому занятию производится по вопросам, разработанным для каждой темы практических занятий и (или) лекций. В процессе подготовки к практическим занятиям, необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной литературы.

Работа студентов во время практического занятия осуществляется на основе заданий, которые выдаются обучающимся в начале или во время занятия. На практических занятиях приветствуется активное участие в обсуждении конкретных ситуаций, способность на основе полученных знаний находить наиболее эффективные решения поставленных проблем, уметь находить полезный дополнительный материал по тематике занятий. Обучающимся необходимо обращать внимание на основные понятия, алгоритмы, определять практическую значимость рассматриваемых вопросов. На практических занятиях обучающиеся должны уметь выполнить расчет по заданным параметрам или выработать определенные решения по обозначенной проблеме. Задания могут быть групповые и индивидуальные. В зависимости от сложности предлагаемых заданий, целей занятия, общей подготовки обучающихся преподаватель может подсказать обучающимся алгоритм решения или первое действие, или указать общее направление рассуждений. Полученные результаты обсуждаются с позиций их адекватности или эффективности в рассмотренной ситуации.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы

Организация самостоятельной работы обучающихся ориентируется на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей, переход от поточного к индивидуализированному обучению с учетом потребностей и возможностей обучающегося.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной литературой, материалами периодических изданий и Интернета является наиболее эффективным методом получения дополнительных знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала. Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса.

Самостоятельная работа реализуется:

- непосредственно в процессе аудиторных занятий;
- на лекциях, практических занятиях;
- в контакте с преподавателем вне рамок расписания;
- на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.;
- в библиотеке, дома, на кафедре при выполнении обучающимся учебных и практических задач.

Эффективным средством осуществления обучающимся самостоятельной работы является

электронная информационно-образовательная среда университета, которая обеспечивает доступ к учебным планам, рабочим программам дисциплин (модулей), практик, к изданиям электронных библиотечных систем.

10. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств представлен в приложении № 1.

Приложение 1 к рабочей программе дисциплины
Б1.О.03.03 «Дискретная математика»

**Фонд оценочных средств
по дисциплине
Б1.О.03.03 «Дискретная математика»**

| | |
|---|--|
| Код и направление подготовки (специальность) | 01.03.02 Прикладная математика и информатика |
| Направленность (профиль) | Прикладная математика и информатика |
| Квалификация | Бакалавр |
| Форма обучения | Очная |
| Год начала подготовки | 2022 |
| Институт / факультет | Институт автоматизации и информационных технологий |
| Выпускающая кафедра | кафедра "Прикладная математика и информатика" |
| Кафедра-разработчик | кафедра "Прикладная математика и информатика" |
| Объем дисциплины, ч. / з.е. | 180 / 5 |
| Форма контроля (промежуточная аттестация) | Зачет, Экзамен |

**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю),
соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной
программы**

| Наименование категории (группы) компетенций | Код и наименование компетенции | Код и наименование индикатора достижения компетенции | Результаты обучения (знать, уметь, владеть, соотнесенные с индикаторами достижения компетенции) |
|---|---|---|---|
| Общепрофессиональные компетенции | | | |
| Теоретические и практические основы профессиональной деятельности | ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат связанный с прикладной математикой и информатикой | Знать основные понятия, факты, концепции, принципы дискретной математики, связанные с прикладной математикой и информатикой. |
| | | ОПК-1.2 Умеет выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук; применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач | Уметь выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учётом основных понятий и общих закономерностей дискретной математики; применять фундаментальные знания, полученные в области дискретной математики к решению конкретных задач профессиональной деятельности. |
| Универсальные компетенции | | | |
| Системное и критическое мышление | УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач | УК-1.1 Знает принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов | Знать принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов на основе методов дискретной математики. |

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | УК-1.2 Умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач | Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения профессиональных задач, осуществлять критический анализ и синтез информации с помощью алгоритмов дискретной математики. |
|--|--|--|--|

Матрица соответствия оценочных средств запланированным результатам обучения

| Код индикатора достижения компетенции | Результаты обучения | Оценочные средства | Текущий контроль успеваемости | Промежуточная аттестация |
|---|--|--------------------|-------------------------------|--------------------------|
| Графы | | | | |
| ОПК-1.1 Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат связанный с прикладной математикой и информатикой | Знать основные понятия, факты, концепции, принципы дискретной математики, связанные с прикладной математикой и информатикой. | Тест. | Да | Да |
| ОПК-1.2 Умеет выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук; применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач | Уметь выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учётом основных понятий и общих закономерностей дискретной математики; применять фундаментальные знания, полученные в области дискретной математики к решению конкретных задач профессиональной деятельности. | Тест. | Да | Да |
| УК-1.1 Знает принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов | Знать принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов на основе методов дискретной математики. | Тест. | Да | Да |

| | | | | |
|---|--|-------|----|----|
| УК-1.2 Умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач | Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения профессиональных задач, осуществлять критический анализ и синтез информации с помощью алгоритмов дискретной математики. | Тест. | Да | Да |
| Приложения графов | | | | |
| ОПК-1.1 Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат связанный с прикладной математикой и информатикой | Знать основные понятия, факты, концепции, принципы дискретной математики, связанные с прикладной математикой и информатикой. | Тест. | Да | Да |
| ОПК-1.2 Умеет выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук; применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач | Уметь выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учётом основных понятий и общих закономерностей дискретной математики; применять фундаментальные знания, полученные в области дискретной математики к решению конкретных задач профессиональной деятельности. | Тест. | Да | Да |
| УК-1.1 Знает принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов | Знать принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов на основе методов дискретной математики. | Тест. | Да | Да |
| УК-1.2 Умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач | Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения профессиональных задач, осуществлять критический анализ и синтез информации с помощью алгоритмов дискретной математики. | Тест. | Да | Да |
| Комбинаторика | | | | |

| | | | | |
|---|--|-------|----|----|
| ОПК-1.1 Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат связанный с прикладной математикой и информатикой | Знать основные понятия, факты, концепции, принципы дискретной математики, связанные с прикладной математикой и информатикой. | Тест. | Да | Да |
| ОПК-1.2 Умеет выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук; применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач | Уметь выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учётом основных понятий и общих закономерностей дискретной математики; применять фундаментальные знания, полученные в области дискретной математики к решению конкретных задач профессиональной деятельности. | Тест. | Да | Да |
| УК-1.1 Знает принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов | Знать принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов на основе методов дискретной математики. | Тест. | Да | Да |
| УК-1.2 Умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач | Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения профессиональных задач, осуществлять критический анализ и синтез информации с помощью алгоритмов дискретной математики. | Тест. | Да | Да |
| Коды | | | | |
| ОПК-1.1 Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат связанный с прикладной математикой и информатикой | Знать основные понятия, факты, концепции, принципы дискретной математики, связанные с прикладной математикой и информатикой. | Тест. | Да | Да |

| | | | | |
|--|---|--------------|-----------|-----------|
| <p>ОПК-1.2 Умеет выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук; применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач</p> | <p>Уметь выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учётом основных понятий и общих закономерностей дискретной математики; применять фундаментальные знания, полученные в области дискретной математики к решению конкретных задач профессиональной деятельности.</p> | <p>Тест.</p> | <p>Да</p> | <p>Да</p> |
| <p>УК-1.1 Знает принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов</p> | <p>Знать принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов на основе методов дискретной математики.</p> | <p>Тест.</p> | <p>Да</p> | <p>Да</p> |
| <p>УК-1.2 Умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач</p> | <p>Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения профессиональных задач, осуществлять критический анализ и синтез информации с помощью алгоритмов дискретной математики.</p> | <p>Тест.</p> | <p>Да</p> | <p>Да</p> |
| <p>Специальные приложения графов</p> | | | | |
| <p>ОПК-1.1 Знает основные понятия, факты, концепции, принципы теорий математических и (или) естественных; базовый математический аппарат связанный с прикладной математикой и информатикой</p> | <p>Знать основные понятия, факты, концепции, принципы дискретной математики, связанные с прикладной математикой и информатикой.</p> | <p>Тест.</p> | <p>Да</p> | <p>Да</p> |

| | | | | |
|--|---|--------------|-----------|-----------|
| <p>ОПК-1.2 Умеет выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, формулируемых в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук; применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности к решению конкретных задач</p> | <p>Уметь выполнять стандартные действия, решать типовые задачи с учётом основных понятий и общих закономерностей дискретной математики; применять фундаментальные знания, полученные в области дискретной математики к решению конкретных задач профессиональной деятельности.</p> | <p>Тест.</p> | <p>Да</p> | <p>Да</p> |
| <p>УК-1.1 Знает принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов</p> | <p>Знать принципы поиска, сбора и обобщения информации, методы анализа результатов на основе методов дискретной математики.</p> | <p>Тест.</p> | <p>Да</p> | <p>Да</p> |
| <p>УК-1.2 Умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач</p> | <p>Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения профессиональных задач, осуществлять критический анализ и синтез информации с помощью алгоритмов дискретной математики.</p> | <p>Тест.</p> | <p>Да</p> | <p>Да</p> |



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.П. КОТЕНКО

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Самара
Самарский государственный технический университет
2010

Индивидуальные задания и задачи контрольных работ

1. Представить полиномом Жегалкина:

1) основные логические операции;

Ответ: $xy = x \cdot y$, $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$, $\bar{x} = x \oplus 1$, $x \rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1$,
 $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$.

2) $x \vee y \vee z$;

Ответ: $xyz \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus z$.

3) $xy \vee yz \vee xz$;

Ответ: $xy \oplus xz \oplus yz$.

4) $xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$;

Ответ: $x \oplus y \oplus z \oplus 1$.

2. Доказать, что все переменные полинома Жегалкина существенны.

3. Линейны ли функции

1) $\overline{(x \rightarrow y)} \oplus \bar{xy}$;

Ответ: нет.

2) $xy \vee \bar{x}\bar{y} \vee z$;

Ответ: нет.

3) $x\bar{y}(x \leftrightarrow y)$;

Ответ: да.

4) $(x \vee yz) \oplus \bar{xyz}$;

Ответ: да.

4. Найти число всех линейных функций n переменных.

Ответ: 2^{n+1} .

5. Найти число таких линейных функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что

$$f(0, 0, \dots, 0) = f(1, 1, \dots, 1) = 1.$$

Ответ: 2^{n-1} .

6. Монотонны ли функции

1) $xy \vee xz \vee \bar{x}z$;

Ответ: да.

2) $x \rightarrow (x \rightarrow y)$;

Ответ: нет.

$$3) \overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y};$$

Ответ: нет.

$$4) \overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \bar{y};$$

Ответ: да.

$$5) xy \vee x \vee \bar{x}z;$$

Ответ: да.

7. Перечислить все монотонные функции двух переменных.

Ответ: 0, 1, x, y, xy, $x \vee y$.

8. Доказать полноту системы функций

$$1) \{xy, \bar{x}\};$$

$$2) \{x \vee y, \bar{x}\};$$

$$3) \{\overline{x \vee y}\};$$

$$4) \{x \oplus y, x \vee y, 1\};$$

$$5) \{x \rightarrow y, 0\}.$$

9. Реализовать релейно-контактными схемами функции

$$1) (y \vee z) \rightarrow x \bar{y};$$

$$2) x \bar{y} \leftrightarrow yx;$$

$$3) x \oplus y \oplus z.$$

10. Построить машину Тьюринга для вычисления функции

$$\overline{\text{sgn}x} = \begin{cases} 1 \leftarrow x = 0, \\ 0 \leftarrow x \neq 0. \end{cases} \text{ Исходное состояние } q_1 01110 \text{ или } q_1 00000.$$

Ответ:

| | | |
|----------------|-------------------|-------------------|
| | 0 | 1 |
| q ₁ | q ₂ R | - |
| q ₂ | q ₀ 1L | q ₃ R |
| q ₃ | q ₄ L | 0R |
| q ₄ | L | q ₀ 0L |

11. Построить машину Тьюринга для вычисления функции $x+y$.

Ответ:

| | | |
|--|---|---|
| | 0 | 1 |
|--|---|---|

| | | |
|----------------|-------------------|-------------------|
| q ₁ | q ₂ R | - |
| q ₂ | q ₃ 1R | R |
| q ₃ | q ₄ L | R |
| q ₄ | - | q ₅ 0L |
| q ₅ | q ₀ | L |

12. Какую функцию вычисляет машина Тьюринга с программой

$$\{q_1 0 \rightarrow q_2 0R, q_1 1 \rightarrow q_0 1, q_2 0 \rightarrow q_0 1, q_2 1 \rightarrow q_2 R\}?$$

Ответ: $f(x) = x + 1$.

13. Построить машину Тьюринга для функций $I_n^m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $1 \leq m \leq n$.

14. Показать правильную вычислимость функции $h(x) = f(g(x))$, если правильно вычислимы функции $f(x)$ и $g(x)$.

15. Показать правильную вычислимость функции $f(x) = \mu_y (g(x, y) = 0)$, если правильно вычислима функция $g(x, y)$.

16. Показать, что для произвольного графа $G = (S, U)$ справедливо равенство $\sum_{x \in S} P(x) = 2|U|$.

17. По матрице смежности вершин построить граф:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Построить граф, центр которого:

- 1) состоит ровно из одной вершины;
- 2) состоит ровно из трёх вершин и не совпадает со множеством всех вершин;
- 3) совпадает со множеством всех вершин.

19. Показать, что граф без петель и кратных рёбер, содержащий не менее двух вершин, имеет две вершины с одинаковыми степенями.

20. По заданной матрице весов найти минимальный (максимальный) путь между крайними по номерам вершинами по алгоритму Дейкстры:

$$1) \begin{pmatrix} - & 5 & 10 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 9 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & 3 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=16$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6)$; $d_{\max}=35$, $l_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$2) \begin{pmatrix} - & 11 & \infty & 14 & 15 & \infty \\ \infty & - & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 13 \\ \infty & 7 & 11 & - & 9 & \infty \\ \infty & 11 & 10 & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=29$, $l_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=60$, $l_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$.

$$3) \begin{pmatrix} - & 5 & 8 & 7 & 18 & \infty \\ \infty & - & 11 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 17 \\ \infty & 10 & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & 7 & 8 & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=24$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=53$, $l_{\max}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$.

$$4) \begin{pmatrix} - & 6 & 8 & 11 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 9 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 4 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=18$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)$; $d_{\max}=40$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$5) \begin{pmatrix} - & \infty & 11 & 15 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 14 & 18 & \infty \\ \infty & 9 & - & 13 & 7 & 11 & 22 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 & 23 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 19 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=30$, $l_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_7)$; $d_{\max}=61$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_2)-(x_2,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$6) \begin{pmatrix} - & 5 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 14 \\ \infty & 3 & - & 3 & 4 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=12$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6)$; $d_{\max}=23$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_6)$.

$$7) \begin{pmatrix} - & 7 & 9 & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 \\ \infty & 4 & \infty & 6 & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=19$, $l_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=32$, $l_{\max 1}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6)$, $l_{\max 2}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_6)$.

$$8) \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & \infty & 14 & \infty \\ \infty & - & 7 & 16 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 19 & \infty & 21 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 17 \\ \infty & 13 & 14 & 15 & - & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=32$, $l_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=70$, $l_{\max}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_6)$.

$$9) \begin{pmatrix} - & 10 & 12 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 11 & 9 & \infty & 19 \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & \infty \\ \infty & \infty & 13 & - & 11 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=28$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=48$, $l_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$10) \begin{pmatrix} - & 7 & 19 & 20 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & - & \infty & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 9 & \infty & 16 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 8 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=28$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_7)$; $d_{\max}=52$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$11) \begin{pmatrix} - & 7 & 2 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & 2 & - & 1 & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 3 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=8$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_6)$; $d_{\max}=21$, $l_{\max 1}=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6)$, $l_{\max 2}=(x_1,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6)$.

$$12) \begin{pmatrix} - & 10 & 11 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & 8 & 11 & 17 \\ \infty & \infty & - & 5 & 6 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=22$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=44$, $l_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$13) \begin{pmatrix} - & 6 & \infty & 9 & 12 & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & 4 & 8 & - & 6 & 14 \\ \infty & 7 & 5 & \infty & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=18$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$; $d_{\max}=34$, $l_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$.

$$14) \begin{pmatrix} - & 4 & 9 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 4 & - & 6 & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=9$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$; $d_{\max}=21$, $l_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$.

$$15) \begin{pmatrix} - & 5 & \infty & 10 & 8 & 12 & \infty \\ \infty & - & 7 & \infty & 4 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & \infty & 6 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 14 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & - & 13 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=21$, $l_{\min}=(x_1,x_6)-(x_6,x_7)$; $d_{\max}=34$, $l_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$.

$$16) \begin{pmatrix} - & 6 & 9 & 13 & 12 & \infty \\ \infty & - & 5 & 9 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & \infty & 15 \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=20$, $l_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=33$, $l_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$17) \begin{pmatrix} - & 8 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 10 & 9 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & - & 10 & 12 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=17$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6)$; $d_{\max}=48$, $l_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$18) \begin{pmatrix} - & 11 & 14 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 8 & 10 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & - & 11 & 16 & 20 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=33$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6)$; $d_{\max}=58$, $l_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6)$.

$$19) \begin{pmatrix} - & 9 & 7 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 15 & \infty \\ \infty & 5 & - & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 6 & 7 & - & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=23$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)$; $d_{\max}=52$, $l_{\max}=(x_1,x_4)-(x_4,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$20) \begin{pmatrix} - & \infty & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 11 & 5 & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & 3 & 6 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & - & 5 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=17$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7)$; $d_{\max}=36$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_7)$.

$$21) \begin{pmatrix} - & 4 & 8 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 3 & \infty & 10 \\ \infty & 3 & - & 4 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 4 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=11$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6)$; $d_{\max}=23$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_6)$.

$$22) \begin{pmatrix} - & 5 & 4 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & \infty & 13 \\ \infty & 6 & - & 5 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=17$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_6)$; $d_{\max}=26$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_6)$.

$$23) \begin{pmatrix} - & 12 & 10 & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 10 & 7 & 15 \\ \infty & 8 & - & 7 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & - & 12 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=23$, $l_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=42$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6)$.

$$24) \begin{pmatrix} - & 15 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 12 & 18 \\ \infty & 10 & - & 9 & 12 & 19 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 13 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 14 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=29$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6)$; $d_{\max}=56$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6)$.

$$25) \begin{pmatrix} - & \infty & 7 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 6 & 13 & \infty \\ \infty & 5 & - & 4 & 5 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & - & 5 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=15$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7)$; $d_{\max}=30$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_7)$.

$$26) \begin{pmatrix} - & 7 & 8 & 13 & \infty & \infty \\ \infty & - & 9 & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 7 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & 17 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=16$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6)$; $d_{\max}=41$, $l_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$27) \begin{pmatrix} - & 4 & 5 & 10 & 11 & \infty \\ \infty & - & 11 & 3 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & - & 6 & 7 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=19$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=35$, $l_{\max}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$28) \begin{pmatrix} - & 8 & \infty & 5 & 10 & \infty \\ \infty & - & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ \infty & 4 & 6 & - & 5 & 11 \\ \infty & 5 & 5 & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=13$, $l_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=30$, $l_{\max 1}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$, $l_{\max 2}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$.

$$29) \begin{pmatrix} - & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 4 & 6 & 8 \\ \infty & 8 & - & 5 & 6 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & - & 5 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=12$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)$; $d_{\max}=23$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$30) \begin{pmatrix} - & 3 & 3 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & \infty & 9 & 15 \\ \infty & \infty & - & 4 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & - & 3 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=15$, $l_{\min}=(x_1,x_5)-(x_5,x_7)$; $d_{\max}=34$, $l_{\max}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_7)$.

21. По заданной матрице весов найти минимальный путь между крайними по номерам вершинами по алгоритму Беллмана-Мура

$$1) \begin{pmatrix} - & 15 & \infty & 12 & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & -6 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -4 & 2 & -3 \\ \infty & \infty & 10 & - & 7 & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=11$, $l_{\min}=(x_1, x_5)-(x_5, x_6)-(x_6, x_7)$.

$$2) \begin{pmatrix} - & 3 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & 5 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & - & -4 & -6 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & 8 & 6 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=5$, $l_{\min}=(x_1, x_2)-(x_2, x_3)-(x_3, x_5)-(x_5, x_6)-(x_6, x_7)$.

$$3) \begin{pmatrix} - & 2 & \infty & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 2 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -7 & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -4 & \infty & 8 & - & \infty & 11 \\ \infty & \infty & \infty & -3 & -5 & - & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=11$, $l_{\min}=(x_1, x_5)-(x_5, x_2)-(x_2, x_6)-(x_6, x_4)-(x_4, x_7)$.

$$4) \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 7 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 4 & - & \infty & 7 & 6 & 10 \\ \infty & \infty & -5 & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & -9 & \infty & 12 & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=6$, $l_{\min}=(x_1, x_2)-(x_2, x_4)-(x_4, x_3)-(x_3, x_6)-(x_6, x_7)$.

$$5) \begin{pmatrix} - & 8 & 7 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & - & -10 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 5 & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & -6 & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=6$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_6)$.

$$6) \begin{pmatrix} - & -3 & 7 & \infty & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & 11 & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 6 & 4 \\ \infty & \infty & 7 & 9 & - & -6 & 12 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=1$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7)$.

$$7) \begin{pmatrix} - & 4 & 7 & 14 & -6 & 11 & \infty \\ \infty & - & -3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -8 & 7 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 & \infty \\ \infty & 12 & \infty & 5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=4$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$8) \begin{pmatrix} - & \infty & 6 & 9 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 7 & 10 & \infty \\ \infty & 3 & - & \infty & \infty & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & -6 & 8 & - & 4 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=7$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$9) \begin{pmatrix} - & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & -6 & 10 & 12 \\ \infty & 4 & - & -4 & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 7 & 10 & - & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=6$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$10) \begin{pmatrix} - & 6 & 11 & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & 7 & 6 \\ \infty & -5 & - & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & -4 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=8, l_{\min}=(x_1, x_4)-(x_4, x_5)-(x_5, x_6)$.

$$11) \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 15 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 4 & - & 10 & -6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & -18 & 7 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=3, l_{\min}=(x_1, x_4)-(x_4, x_6)-(x_6, x_2)-(x_2, x_3)-(x_3, x_7)$.

$$12) \begin{pmatrix} - & 6 & 12 & 16 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & \infty & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & -5 & \infty & \infty & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & -7 & \infty & \infty & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=2, l_{\min}=(x_1, x_5)-(x_5, x_2)-(x_2, x_3)-(x_3, x_4)-(x_4, x_7)$.

$$13) \begin{pmatrix} - & 3 & 11 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ \infty & - & -5 & 15 & \infty & 18 & \infty \\ \infty & \infty & - & 7 & -7 & 8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & 10 & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 21 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=-8, l_{\min}=(x_1, x_2)-(x_2, x_3)-(x_3, x_5)-(x_5, x_6)-(x_6, x_7)$.

$$14) \begin{pmatrix} - & \infty & 9 & 10 & 11 & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & 8 & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty & 12 \\ \infty & \infty & -4 & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 14 & - & 5 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=10$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$15) \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & -8 & \infty & \infty \\ \infty & - & 13 & -9 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & -4 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=9$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$16) \begin{pmatrix} - & 3 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ \infty & - & \infty & 8 & 5 & -10 & \infty \\ \infty & 4 & - & 3 & 6 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & -5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 & 13 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=-3$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$17) \begin{pmatrix} - & 6 & 15 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 5 & \infty & 11 & 18 & 20 \\ \infty & \infty & - & -4 & -10 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & -6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=2$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$18) \begin{pmatrix} - & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & - & 6 & -6 & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & 9 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & -5 & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=8$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_4)-(x_4,x_7)$.

$$19) \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & 7 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & -7 & \infty \\ \infty & -8 & \infty & - & \infty & 5 & 6 \\ \infty & \infty & 5 & 9 & - & 4 & 18 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=12$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$20) \begin{pmatrix} - & 6 & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & -4 & - & 5 & 8 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & - & -5 & 7 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=10$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_2)-(x_2,x_4)-(x_4,x_5)-(x_5,x_6)$.

$$21) \begin{pmatrix} - & \infty & -11 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ \infty & - & \infty & 12 & 8 & 15 & \infty \\ \infty & 5 & - & 17 & -9 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 16 & 27 \\ \infty & \infty & \infty & -8 & \infty & - & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=-7$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_4)-(x_4,x_7)$.

$$22) \begin{pmatrix} - & \infty & 15 & \infty & 9 & 22 & \infty \\ \infty & - & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & -6 & - & 4 & -7 & -8 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 9 & - & 8 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 11 & \infty & - & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=22$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_4)-(x_4,x_7)$.

$$23) \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & 10 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & 12 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 5 & -8 & 9 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & -7 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=7$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_6)-(x_6,x_7)$.

$$24) \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 3 & \infty & \infty & 9 & \infty \\ \infty & \infty & - & -4 & 6 & -8 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 7 & \infty & 9 & - & 4 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=15$, $l_{\min 1}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)-(x_6,x_7)$, $l_{\min 2}=(x_1,x_5)-(x_5,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_4)-(x_4,x_7)$.

$$25) \begin{pmatrix} - & 7 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & - & 9 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & \infty & 8 \\ \infty & -6 & 4 & - & 10 & \infty \\ \infty & 8 & -5 & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=17$, $l_{\min}=(x_1,x_4)-(x_4,x_2)-(x_2,x_3)-(x_3,x_6)$.

$$26) \begin{pmatrix} - & 5 & 9 & \infty & 7 & 10 & \infty \\ \infty & - & \infty & 13 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & -6 & - & 4 & -8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 10 & - & 5 & 15 \\ \infty & \infty & \infty & 8 & -7 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=3$, $l_{\min}=(x_1,x_3)-(x_3,x_5)-(x_5,x_6)-(x_6,x_4)-(x_4,x_7)$.

$$27) \begin{pmatrix} - & 5 & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & \infty & -8 & 13 & \infty \\ \infty & \infty & - & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 10 & \infty & - & -9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 7 & \infty & - & \infty & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 6 & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $d_{\min}=9$, $l_{\min}=(x_1,x_2)-(x_2,x_5)-(x_5,x_7)$.

$$28) \begin{pmatrix} - & \infty & 12 & \infty & \infty & 15 & \infty \\ \infty & - & 6 & 10 & 7 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & \infty & 10 & -8 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 11 & - & 7 & 16 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=10$, $l_{\min 1}=(x_1, x_6)-(x_6, x_2)-(x_2, x_3)-(x_3, x_6)-(x_6, x_7)$,
 $l_{\min 2}=(x_1, x_3)-(x_3, x_6)-(x_6, x_7)$.

$$29) \begin{pmatrix} - & 6 & \infty & \infty & 12 & \infty & \infty \\ \infty & - & 4 & 10 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & \infty & - & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & \infty & 6 \\ \infty & -8 & 7 & 11 & - & -6 & \infty \\ \infty & \infty & -8 & 7 & \infty & - & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=8$, $l_{\min}=(x_1, x_5)-(x_5, x_6)-(x_6, x_3)-(x_3, x_4)-(x_4, x_7)$.

$$30) \begin{pmatrix} - & 7 & 5 & \infty & 9 & \infty \\ \infty & - & -8 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & - & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & -4 & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $d_{\min}=9$, $l_{\min}=(x_1, x_2)-(x_2, x_3)-(x_3, x_5)-(x_5, x_4)-(x_4, x_6)$.

22. По заданной матрице весов найти остов минимального (максимального) веса и его вес:

$$1) \begin{pmatrix} - & 10 & \infty & 5 & \infty & \infty & 14 \\ 10 & - & 6 & 2 & 4 & 8 & \infty \\ \infty & 6 & - & 3 & 1 & 1 & \infty \\ 5 & 2 & 3 & - & 6 & \infty & 3 \\ \infty & 4 & 1 & 6 & - & 5 & \infty \\ \infty & 8 & 1 & \infty & 5 & - & 2 \\ 14 & \infty & \infty & 3 & \infty & 2 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=14$, $G_1=\{(x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_4, x_7), (x_6, x_7)\}$,
 $G_2=\{(x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4), (x_3, x_5), (x_3, x_6), (x_6, x_7)\}$.

$$2) \begin{pmatrix} - & 7 & 15 & 12 & \infty & 10 & \infty \\ 7 & - & 13 & 9 & \infty & \infty & 8 \\ 15 & 13 & - & 7 & 15 & 7 & \infty \\ 12 & 9 & 7 & - & 9 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 15 & 9 & - & 10 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & \infty & 10 & - & 12 \\ \infty & 8 & \infty & 11 & \infty & 12 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=47$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_4),(x_2,x_7),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_4,x_5)\}$.

$$3) \begin{pmatrix} - & 10 & 11 & \infty & 14 & \infty & 12 \\ 10 & - & 10 & 9 & \infty & \infty & 7 \\ 11 & 10 & - & 12 & 10 & \infty & 6 \\ \infty & 9 & 12 & - & 9 & 12 & \infty \\ 14 & \infty & 10 & 9 & - & 11 & 12 \\ \infty & \infty & \infty & 12 & 11 & - & \infty \\ 12 & 7 & 6 & \infty & 12 & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=52$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_4),(x_2,x_7),(x_3,x_7),(x_4,x_5),(x_5,x_6)\}$.

$$4) \begin{pmatrix} - & 3 & 5 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ 3 & - & 10 & 6 & 8 & \infty & 4 \\ 5 & 10 & - & 5 & 7 & \infty & 9 \\ \infty & 6 & 5 & - & 8 & 7 & \infty \\ 6 & 8 & 7 & 8 & - & 9 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 9 & - & \infty \\ \infty & 4 & 9 & \infty & 11 & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=30$, $G=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,x_5),(x_2,x_7),(x_3,x_4),(x_4,x_6)\}$.

$$5) \begin{pmatrix} - & 8 & \infty & 10 & 13 & \infty & 11 \\ 8 & - & 7 & 8 & \infty & 15 & \infty \\ \infty & 7 & - & \infty & 19 & 10 & 15 \\ 10 & 8 & \infty & - & 9 & \infty & 6 \\ 13 & \infty & 19 & 9 & - & 8 & \infty \\ \infty & 15 & 10 & \infty & 8 & - & 12 \\ 11 & \infty & 15 & 6 & \infty & 12 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=46$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_4,x_5),(x_4,x_7),(x_5,x_6)\}$.

$$6) \begin{pmatrix} - & 6 & 8 & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 6 & - & 11 & 12 & 9 & \infty & 5 \\ 8 & 11 & - & 7 & 8 & \infty & 9 \\ \infty & 12 & 7 & - & 6 & 5 & 10 \\ \infty & 9 & 8 & 6 & - & 8 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 5 & 8 & - & 7 \\ \infty & 5 & 9 & 10 & \infty & 7 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=36$, $G=\{(x_1,x_2),(x_1,x_6),(x_2,x_7),(x_3,x_4),(x_4,x_5),(x_4,x_6)\}$.

$$7) \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & 3 & 6 & \infty \\ 3 & - & 7 & 6 & \infty & \infty & 4 \\ 8 & 7 & - & 4 & 6 & \infty & 10 \\ \infty & 6 & 4 & - & 5 & 7 & \infty \\ 3 & \infty & 6 & 5 & - & 8 & 9 \\ 6 & \infty & \infty & 7 & 8 & - & \infty \\ \infty & 4 & 10 & \infty & 9 & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=25$, $G=\{(x_1,x_2),(x_1,x_5),(x_1,x_6),(x_2,x_7),(x_3,x_4),(x_4,x_5)\}$.

$$8) \begin{pmatrix} - & 9 & 10 & 15 & \infty & \infty & 11 \\ 9 & - & 14 & 12 & \infty & 8 & 15 \\ 10 & 14 & - & 10 & 9 & \infty & 6 \\ 15 & 12 & 10 & - & 11 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 11 & - & 12 & 11 \\ \infty & 8 & \infty & 12 & 12 & - & \infty \\ 11 & 15 & 6 & \infty & 11 & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=52$, $G=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_6),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_3,x_7)\}$.

$$9) \begin{pmatrix} - & 8 & 9 & \infty & \infty & \infty & 6 \\ 8 & - & 7 & 6 & 9 & \infty & \infty \\ 9 & 7 & - & 6 & 10 & 5 & \infty \\ \infty & 6 & 6 & - & 8 & 7 & \infty \\ \infty & 9 & 10 & 8 & - & 4 & 5 \\ \infty & \infty & 5 & 7 & 4 & - & 6 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 5 & 6 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=32$, $G=\{(x_1,x_7),(x_2,x_4),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_5,x_6),(x_5,x_7)\}$.

$$10) \begin{pmatrix} - & 8 & 4 & 9 & \infty & 6 & \infty \\ 8 & - & 11 & 6 & 10 & \infty & 8 \\ 4 & 11 & - & 7 & \infty & 9 & \infty \\ 9 & 6 & 7 & - & 5 & 6 & \infty \\ \infty & 10 & \infty & 5 & - & 7 & 6 \\ 6 & \infty & 9 & 6 & 7 & - & 8 \\ \infty & 8 & \infty & \infty & 6 & 8 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=33$, $G=\{(x_1,x_3),(x_1,x_6),(x_2,x_4),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_5,x_7)\}$.

$$11) \begin{pmatrix} - & 10 & \infty & 5 & \infty & 6 & \infty \\ 10 & - & 6 & 1 & 4 & \infty & 5 \\ \infty & 6 & - & 3 & 1 & 2 & \infty \\ 5 & 1 & 3 & - & 3 & \infty & 5 \\ \infty & 4 & 1 & 3 & - & 4 & 2 \\ 6 & \infty & 2 & \infty & 4 & - & \infty \\ \infty & 5 & \infty & 5 & 2 & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=14$, $G=\{(x_1,x_4),(x_2,x_4),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_3,x_6),(x_5,x_7)\}$.

$$12) \begin{pmatrix} - & 5 & 11 & 14 & \infty & \infty & 8 \\ 5 & - & 5 & 7 & \infty & \infty & 8 \\ 11 & 5 & - & 4 & 8 & 6 & \infty \\ 14 & 7 & 4 & - & 7 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 8 & 7 & - & 3 & 5 \\ \infty & \infty & 6 & \infty & 3 & - & 6 \\ 8 & 8 & \infty & 11 & 5 & 6 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=28$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_5,x_6),(x_5,x_7)\}$.

$$13) \begin{pmatrix} - & 6 & 5 & \infty & 8 & \infty & 10 \\ 6 & - & 9 & 7 & 6 & \infty & \infty \\ 5 & 9 & - & 8 & 9 & \infty & 11 \\ \infty & 7 & 8 & - & 5 & 6 & \infty \\ 8 & 6 & 9 & 5 & - & 7 & 9 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 7 & - & \infty \\ 10 & \infty & 11 & \infty & 9 & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=37$, $G=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_2,x_5),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_5,x_7)\}$.

$$14) \begin{pmatrix} - & 5 & 8 & \infty & \infty & 8 & \infty \\ 5 & - & 7 & 10 & \infty & 8 & \infty \\ 8 & 7 & - & 4 & 7 & 7 & \infty \\ \infty & 10 & 4 & - & 6 & 9 & 4 \\ \infty & \infty & 7 & 6 & - & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 7 & 9 & 3 & - & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 4 & 5 & 6 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=28$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_7),(x_5,x_6),(x_5,x_7)\}$.

$$15) \begin{pmatrix} - & 6 & 5 & \infty & 10 & 9 & \infty \\ 6 & - & 4 & 5 & 3 & \infty & 6 \\ 5 & 4 & - & 6 & 7 & \infty & 8 \\ \infty & 5 & 6 & - & 3 & 6 & \infty \\ 10 & 3 & 7 & 3 & - & 8 & 7 \\ 9 & \infty & \infty & 6 & 8 & - & 5 \\ \infty & 6 & 8 & \infty & 7 & 5 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=26$, $G=\{(x_1,x_3),(x_2,x_3),(x_2,x_5),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_6,x_7)\}$.

$$16) \begin{pmatrix} - & 7 & 8 & \infty & 6 & \infty & 4 \\ 7 & - & 8 & \infty & 5 & 10 & \infty \\ 8 & 8 & - & 6 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & - & 3 & 9 & 4 \\ 6 & 5 & \infty & 3 & - & 8 & 7 \\ \infty & 10 & 3 & 9 & 8 & - & \infty \\ 4 & \infty & \infty & 4 & 7 & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=25$, $G=\{(x_1,x_7),(x_2,x_5),(x_3,x_4),(x_3,x_6),(x_4,x_5),(x_4,x_7)\}$.

$$17) \begin{pmatrix} - & 12 & 10 & \infty & 11 & \infty & 18 \\ 12 & - & 13 & 14 & \infty & \infty & 7 \\ 10 & 13 & - & 9 & 13 & \infty & 16 \\ \infty & 14 & 9 & - & 15 & 14 & \infty \\ 11 & \infty & 13 & 15 & - & 15 & 14 \\ \infty & \infty & \infty & 14 & 15 & - & \infty \\ 18 & 7 & 16 & \infty & 14 & \infty & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=63$, $G=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,x_5),(x_2,x_7),(x_3,x_4),(x_4,x_6)\}$.

$$18) \begin{pmatrix} - & 5 & 4 & 11 & \infty & 6 & \infty \\ 5 & - & 8 & 9 & \infty & 9 & \infty \\ 4 & 8 & - & \infty & 5 & \infty & 7 \\ 11 & 9 & \infty & - & \infty & 5 & 3 \\ \infty & \infty & 5 & \infty & - & 7 & 8 \\ 6 & 9 & \infty & 5 & 7 & - & 6 \\ \infty & \infty & 7 & 3 & 8 & 6 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=28$, $G=\{(x_1,x_2),(x_1,x_3),(x_1,x_6),(x_3,x_5),(x_4,x_6),(x_4,x_7)\}$.

$$19) \begin{pmatrix} - & 8 & 9 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 8 & - & 6 & 5 & 9 & \infty & 7 \\ 9 & 6 & - & 11 & 7 & 12 & \infty \\ \infty & 5 & 11 & - & 3 & 5 & 4 \\ 10 & 9 & 7 & 3 & - & 4 & \infty \\ \infty & \infty & 12 & 5 & 4 & - & 9 \\ \infty & 7 & \infty & 4 & \infty & 9 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=30$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_4),(x_4,x_5),(x_4,x_7),(x_5,x_6)\}$.

$$20) \begin{pmatrix} - & 11 & 5 & 8 & \infty & 8 & \infty \\ 11 & - & 6 & 13 & \infty & 10 & \infty \\ 5 & 6 & - & \infty & 7 & \infty & 9 \\ 8 & 13 & \infty & - & 3 & 5 & 8 \\ \infty & \infty & 7 & 3 & - & 9 & 7 \\ 8 & 10 & \infty & 5 & 9 & - & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 8 & 7 & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=33$, $G=\{(x_1,x_3),(x_2,x_3),(x_3,x_5),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_5,x_7)\}$.

$$21) \begin{pmatrix} - & \infty & 11 & \infty & 8 & \infty & 10 \\ \infty & - & \infty & 12 & 5 & 8 & \infty \\ 11 & \infty & - & \infty & 6 & 4 & 3 \\ \infty & 12 & \infty & - & 5 & \infty & 7 \\ 8 & 5 & 6 & 5 & - & 7 & 4 \\ \infty & 8 & 4 & \infty & 7 & - & \infty \\ 10 & \infty & 3 & 7 & 4 & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=29$, $G=\{(x_1,x_5),(x_2,x_5),(x_3,x_6),(x_3,x_7),(x_4,x_5),(x_5,x_7)\}$.

$$22) \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & 10 & 11 & \infty & 6 \\ \infty & - & \infty & 12 & 10 & 5 & \infty \\ \infty & \infty & - & 3 & 3 & \infty & 8 \\ 10 & 12 & 3 & - & 6 & \infty & 7 \\ 11 & 10 & 3 & 6 & - & 9 & \infty \\ \infty & 5 & \infty & \infty & 9 & - & 11 \\ 6 & \infty & 8 & 7 & \infty & 11 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=33$, $G=\{(x_1,x_7),(x_2,x_6),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_4,x_7),(x_5,x_6)\}$.

$$23) \begin{pmatrix} - & \infty & 12 & 10 & 14 & \infty & \infty \\ \infty & - & 12 & \infty & 5 & \infty & 7 \\ 12 & 12 & - & 7 & 6 & 8 & \infty \\ 10 & \infty & 7 & - & 4 & 9 & 9 \\ 14 & 5 & 6 & 4 & - & 8 & \infty \\ \infty & \infty & 8 & 9 & 8 & - & 7 \\ \infty & 7 & \infty & 9 & \infty & 7 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=34$, $G=\{(x_1,x_3),(x_2,x_5),(x_2,x_7),(x_3,x_5),(x_4,x_5),(x_6,x_7)\}$.

$$24) \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & 12 & 7 & \infty & 16 \\ 3 & - & 4 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ 8 & 4 & - & 5 & 7 & 11 & \infty \\ 12 & \infty & 5 & - & 10 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 7 & 10 & - & 5 & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 6 & 5 & - & 5 \\ 16 & \infty & \infty & 4 & 8 & 5 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=26$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_4,x_7),(x_5,x_6),(x_6,x_7)\}$.

$$25) \begin{pmatrix} - & \infty & 7 & \infty & \infty & 11 & \infty \\ \infty & - & \infty & 17 & 8 & 15 & \infty \\ 7 & \infty & - & 5 & 6 & \infty & 10 \\ \infty & 17 & 5 & - & 12 & 5 & 3 \\ \infty & 8 & 6 & 12 & - & 4 & 9 \\ 11 & 15 & \infty & 5 & 4 & - & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 3 & 9 & \infty & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=32$, $G=\{(x_1,x_3),(x_2,x_5),(x_3,x_4),(x_4,x_6),(x_4,x_7),(x_5,x_6)\}$.

$$26) \begin{pmatrix} - & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty \\ \infty & - & 6 & 9 & 5 & 8 & 11 \\ \infty & 6 & - & 2 & 5 & 6 & 6 \\ \infty & 9 & 2 & - & \infty & 4 & \infty \\ 7 & 5 & 5 & \infty & - & 4 & 12 \\ \infty & 8 & 6 & 4 & 4 & - & 3 \\ \infty & 11 & 6 & \infty & 12 & 3 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=25$, $G=\{(x_1,x_5),(x_2,x_5),(x_3,x_4),(x_4,x_6),(x_5,x_6),(x_6,x_7)\}$.

$$27) \begin{pmatrix} - & 3 & 8 & \infty & 9 & \infty & \infty \\ 3 & - & \infty & 11 & 6 & \infty & 15 \\ 8 & \infty & - & 4 & 5 & 7 & 10 \\ \infty & 11 & 4 & - & 13 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 13 & - & 6 & 12 \\ \infty & \infty & 7 & 8 & 6 & - & 3 \\ \infty & 15 & 10 & 7 & 12 & 3 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=27$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_5),(x_3,x_4),(x_3,x_5),(x_5,x_6),(x_6,x_7)\}$.

$$28) \begin{pmatrix} - & 4 & \infty & \infty & 7 & \infty & 20 \\ 4 & - & 3 & \infty & 5 & 14 & 15 \\ \infty & 3 & - & 6 & 7 & 11 & \infty \\ \infty & \infty & 6 & - & 12 & 10 & 4 \\ 7 & 5 & 7 & 12 & - & 8 & \infty \\ \infty & 14 & 11 & 10 & 8 & - & 5 \\ 20 & 15 & \infty & 4 & \infty & 5 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=27$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_5),(x_3,x_4),(x_4,x_7),(x_6,x_7)\}$.

$$29) \begin{pmatrix} - & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & - & 1 & 8 & 4 & \infty & 10 \\ \infty & 1 & - & \infty & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & \infty & - & \infty & 3 & \infty \\ \infty & 4 & 5 & \infty & - & 4 & 10 \\ \infty & \infty & 6 & 3 & 4 & - & 4 \\ \infty & 10 & 9 & \infty & 10 & 4 & - \end{pmatrix};$$

ОТВЕТ: $v_{\min}=18$, $G=\{(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_2,x_5),(x_4,x_6),(x_5,x_6),(x_6,x_7)\}$.

$$30) \begin{pmatrix} - & 10 & 5 & 2 & 16 & \infty & \infty \\ 10 & - & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 4 & - & 8 & 15 & 13 & \infty \\ 2 & \infty & 8 & - & 8 & 5 & 7 \\ 16 & \infty & 15 & 8 & - & 11 & 18 \\ \infty & \infty & 13 & 5 & 11 & - & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & 18 & 4 & - \end{pmatrix};$$

Ответ: $v_{\min}=28$, $G=\{(x_1,x_3),(x_1,x_4),(x_2,x_3),(x_4,x_5),(x_4,x_6),(x_6,x_7)\}$.

23. Найти число остовных деревьев в полном двудольном графе $K_{m,n}$.

Ответ: $n^{m-1}m^{n-1}$.

24. Доказать, что если для любых двух несмежных вершин x и y связного n -вершинного графа выполняется условие $P(x)+P(y)\geq n$, то граф имеет гамильтонов цикл.

25. Доказать, что любой граф можно уложить в \mathfrak{R}^3 .

26. Показать, что при $n>1$ удаление любой вершины графа K_n приводит к графу с меньшим хроматическим числом.

27. Показать, что при $n>1$ удаление любой вершины простого цикла, содержащего n вершин, приводит к графу с меньшим хроматическим числом тогда и только тогда, когда n нечётно.

28. Приведите пример графа, последовательная раскраска вершин которого не минимальна.

29. Построить сетевой граф для проекта из работ a_1, a_2, \dots, a_5 , если работы a_2 и a_3 начаты одновременно, работа a_4 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, a_3 , работа a_5 может быть начата после выполнения работы a_3 .

30. Построить сетевой граф для проекта из работ a_1, a_2, \dots, a_7 , если работа a_3 выполняется после работ a_1 и a_4 , работа a_4 начинается после выполнения работы a_2 , работа a_6 может быть выполнена после работ a_4 и a_5 , работа a_7 выполняется после работ a_3 и a_6 .

Перечень вопросов для подготовки к зачёту:

1. Множества и действия над ними.
2. Отношения и функции. Специальные бинарные отношения.
3. Эквивалентные конечные и бесконечные множества.
4. Кардинальные числа.
5. Аксиомы теории множеств.
6. Основные определения комбинаторного анализа.
7. Правила суммы и произведения.
8. Формулы для расчёта перестановок и сочетаний без повторов и с повторением.
9. Бином Ньютона.
10. Полиномиальная теорема.
11. Свойства биномиальных коэффициентов.
12. Метод рекуррентных соотношений.
13. Метод производящих функций.
14. Производящая функция для сочетаний с ограниченным числом повторов.
15. Производящая функция для сочетаний с неограниченным числом повторов.
16. Применение производящих функций для получения комбинаторных чисел.
17. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения.
18. Экспоненциальные производящие функции.
19. Метод включений и исключений.
20. Учёт весов элементов в формуле включений и исключений.
21. Функция Эйлера.
22. Функция Мёбиуса.
23. Множества и действия над ними.
24. Отношения и функции. Специальные бинарные отношения.
25. Эквивалентные конечные и бесконечные множества.
26. Кардинальные числа.
27. Аксиомы теории множеств.
28. Основные определения комбинаторного анализа.
29. Правила суммы и произведения.
30. Формулы для расчёта перестановок и сочетаний без повторов и с повторением.
31. Бином Ньютона.
32. Полиномиальная теорема.
33. Свойства биномиальных коэффициентов.
34. Метод рекуррентных соотношений.
35. Метод производящих функций.
36. Производящая функция для сочетаний с ограниченным числом повторов.
37. Производящая функция для сочетаний с неограниченным числом повторов.
38. Применение производящих функций для получения комбинаторных чисел.
39. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения.
40. Экспоненциальные производящие функции.
41. Метод включений и исключений.
42. Учёт весов элементов в формуле включений и исключений.
43. Функция Эйлера.
44. Функция Мёбиуса.

45. Основные понятия теории графов.
46. Операции над графами.
47. Маршруты, цепи и циклы.
48. Способы задания графов.
49. Метрические характеристики графа.
50. Упорядочение дуг и вершин орграфа.
51. Выявление маршрутов с заданным числом рёбер.
52. Определение экстремальных путей на графах. Метод Шимбелла.
53. Нахождение кратчайших путей. Алгоритм Дейкстры.
54. Алгоритм Беллмана-Мура.
55. Дерево и лес.
56. Задачи об остове экстремального веса.
57. Обходы графов и фундаментальные циклы.
58. Клики и независимые множества.
59. Эйлеровы и гамильтоновы графы.
60. Доминирующие множества и клики.
61. Планарность графов.
62. Алгоритм укладки графа на плоскость.
63. Хроматические графы. Раскраска графов.
64. Потoki на сетях.
65. Теорема Форда-Фалкерсона.
66. Поток минимальной стоимости.
67. Задачи СПУ: критические пути и работы.
68. Линейные графики СПУ.

Вопросы к экзамену по Дискретной математике в 3-м семестре
для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»:

1. Метрические характеристики графов.
2. Алгоритмы расчёта метрических характеристик (не)орграфов.
3. Матричные алгоритмы расчёта метрических характеристик.
4. Случай взвешенных вершин (не)орграфа.
5. Орграфы задач сетевого планирования и управления.
6. Алгоритмы поиска критического времени проекта и критических работ.
7. Расчёт средних характеристик проектов.
8. Графы задач о назначениях.
9. Решение задачи о назначениях в закрытой и открытой постановке с критериями минимизации и максимизации.
10. Задача оптимального перемещения на булеане множества вершин (не)орграфа.
11. Кластеры выделенных вершин, обязательных для посещения или закрытых для посещения.
12. Орграфы задач управления коллективным обучением.
13. Конечные автоматы задач управления коллективным обучением.
14. Основные понятия теории кодирования.
15. Код Фано.
16. Код Хэмминга.
17. Метрика и норма Хэмминга.
18. Теорема Понтрягина–Куратовского.
19. Алгоритм укладки графа на плоскость.