МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Самарский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВО «СамГТУ»)

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
_____ / О.В. Юсупова
"_____" _____ 20___ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Б1.Б.02.01 «Математика»

Код и направление подготовки (специальность)	10.03.01 Информационная безопасность
Направленность (профиль)	Комплексная защита объектов информатизации (в промышленности)
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная
Год начала подготовки	2020
Институт / факультет	Институт автоматики и информационных технологий
Выпускающая кафедра	кафедра "Электронные системы и информационная безопасность"
Кафедра-разработчик	кафедра "Прикладная математика и информатика"
Объем дисциплины, ч. / з.е.	324 / 9
Форма контроля (промежуточная аттестация)	Экзамен

Самара 2020

Б1.Б.02.01 «Математика»

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) **10.03.01 Информационная безопасность**, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от № 1515 от 01.12.2016 и соответствующего учебного плана.

Разработчик РПД:

Старший преподаватель	Л.В Воропаева
(должность, степень, ученое звание)	(ФИО)

Заведующий кафедрой	В.П. Радченко, доктор физико-математических наук, профессор
	(ФИО, степень, ученое звание)

СОГЛАСОВАНО:

Председатель методического совета факультета / института (или учебно-методической комиссии)	Я.Г Стельмах, кандидат педагогических наук
	(ФИО, степень, ученое звание)
Руководитель образовательной программы	П.О. Скобелев, доктор технических наук
	(ФИО, степень, ученое звание)
Заведующий выпускающей кафедрой	П.О. Скобелев, доктор технических наук
	(ФИО, степень, ученое звание)

Содержание

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы 4
2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы 4
3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся 4
4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам), с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий 5
4.1 Содержание лекционных занятий 5
4.2 Содержание лабораторных занятий 11
4.3 Содержание практических занятий 12
4.4. Содержание самостоятельной работы 16
5. Перечень учебной литературы и учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю) 18
6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения 20
7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем 20
8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю) 21
9. Методические материалы 21
10. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) 23

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Результаты обучения (знать, уметь, владеть, соотнесенные с индикаторами достижения компетенции)
Общепрофессиональные компетенции	
ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	Владеть способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач
	Уметь применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

2. Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы

Место дисциплины (модуля) в структуре образовательной программы: **базовая часть**

Код компетенции	Предшествующие дисциплины	Параллельно осваиваемые дисциплины	Последующие дисциплины
ОПК-2		Дискретная математика; Дополнительные разделы высшей математики; Компьютерная графика, геометрическое моделирование и основы автоматизированного проектирования	Безопасность баз данных; Дискретная математика; Криптографические методы защиты информации; Методы искусственного интеллекта; Метрология, стандартизация и сертификация; Подготовка к процедуре защиты и процедура защиты выпускной квалификационной работы; Теория вероятностей и математическая статистика; Техническая кибернетика; Формально-логические системы

3. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Вид учебной работы	Всего часов / часов в электронной форме	1 семестр часов / часов в электронной форме	2 семестр часов / часов в электронной форме
Аудиторная контактная работа (всего), в том числе:	192	96	96
Лекции	96	48	48
Практические занятия	96	48	48
Внеаудиторная контактная работа, КСР	9	4	5

Самостоятельная работа (всего), в том числе:	60	17	43
подготовка к коллоквиуму	17	4	13
подготовка к практическим занятиям	39	9	30
составление конспектов	4	4	0
Контроль	63	27	36
Итого: час	324	144	180
Итого: з.е.	9	4	5

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам), с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

№ раздела	Наименование раздела дисциплины	Виды учебной нагрузки и их трудоемкость, часы				
		ЛЗ	ЛР	ПЗ	СРС	Всего часов
1	Основы дискретной математики	0	0	0	2	2
2	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	18	0	22	5	45
3	Введение в математический анализ	10	0	8	5	23
4	Дифференциальное исчисление	20	0	18	5	43
5	Интегральное исчисление	16	0	22	14	52
6	Дифференциальные уравнения	18	0	14	14	46
7	Ряды	14	0	12	15	41
	КСР	0	0	0	0	9
	Контроль	0	0	0	0	63
	Итого	96	0	96	60	324

4.1 Содержание лекционных занятий

№ занятия	Наименование раздела	Тема лекции	Содержание лекции (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	Количество часов / часов в электронной форме
1 семестр				

1	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.1. Определители. Тема 2.2. Матрицы.	Определители: основные понятия. Свойства определителей второго и третьего порядков, минор и алгебраическое дополнение. Понятие об определителе n-порядка и его вычисление. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Матрицы: основные понятия. Алгебра матриц. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы.	2
2	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.3. Системы линейных уравнений.	Основные понятия. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрица. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса.	2
3	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.4. Векторы. Скалярное произведение векторов.	Основные понятия. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль, направляющие косинусы. Действия над векторами, заданными проекциями. Определение скалярного произведения векторов. Свойства и вычисление. Некоторые приложения скалярного произведения.	2
4	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.5. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.	Определение векторного произведения. Свойства и вычисление. Геометрический и механический смысл векторного произведения. Условия коллинеарности векторов. Смешанное произведение. Свойства и вычисление. Компланарность векторов. Геометрический смысл смешанного произведения.	2
5	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.6. Линейное пространство. Базис и размерность линейного пространства.	Определение линейного пространства, примеры линейных пространств. Линейная зависимость системы векторов. Основные теоремы о линейной зависимости. Понятие базиса. Разложение вектора по базису. Примеры базисов. Понятие о бесконечномерном пространстве.	2
6	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.7. Аналитическая геометрия на плоскости.	Декартова и полярная системы координат на плоскости. Уравнение прямой. Канонические уравнения линий второго порядка на плоскости. Преобразование системы координат: перенос и поворот осей координат. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду.	2
7	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.8. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости. Тема 2.9. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение прямой в пространстве.	Уравнение плоскости, проходящей через данную точку с заданным вектором нормали. Общее уравнение плоскости. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Прямая в пространстве и на плоскости. Векторное канонические и параметрические уравнения прямой. Взаимное расположение прямой и плоскости.	2

8	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.10. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнения поверхностей второго порядка.	Декартова, сферическая, цилиндрическая системы координат в пространстве. Канонические уравнения поверхностей второго порядка в пространстве. Преобразование системы координат: перенос и поворот осей координат. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.	2
9	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Тема 2.11. Линейные отображения. Тема 2.12. Линейные функционалы. Квадратичные формы.	Понятие о линейном операторе и его матрице в заданном базисе. Примеры линейных операторов. Геометрический смысл матрицы линейного оператора. Действия с операторами. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Определение функционала на линейном пространстве. Определение квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Приведение к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.	2
10	Введение в математический анализ	Тема 3.1. Метрические пространства. Отображение в метрическом пространстве. Тема 3.2. Полнота метрического пространства. Пространства с мерой.	Определение метрического пространства. Понятие Евклидова пространства. Неравенства Коши-Буняковского, треугольника. Примеры метрических пространств. Понятие отображения в метрическом пространстве. Предел отображения. Непрерывное отображение. Фундаментальная последовательность. Полнота некоторых конкретных пространств. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Принцип сжимающих отображений. Понятие меры пространства. Измеримые функции. Выносится на самостоятельное обучение: Комплексное Евклидово пространство.	2
11	Введение в математический анализ	Тема 3.3. Основные виды отображений и их пределы.	Числовые функции одной и нескольких переменных, вектор-функция скалярного аргумента. Числовая последовательность и ее предел. Предел функции одной и нескольких переменных.	2
12	Введение в математический анализ	Тема 3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы.	Понятие бесконечно малых и бесконечно больших, ограниченных и отделимых от нуля величин, их свойства. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Выделение главной части бесконечно малых и бесконечно больших. Эквивалентные бесконечно малые величины. Первый и второй замечательные пределы.	2
13	Введение в математический анализ	Тема 3.5. Основные теоремы теории пределов.	Предельный переход в неравенстве. Признаки существования пределов.	2

14	Введение в математический анализ	Тема 3.6. Непрерывность функции.	Непрерывность числовой функции одной и нескольких переменных. Односторонние пределы функции в точке. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций, непрерывных в точке и на отрезке.	2
15	Дифференциальное исчисление	Тема 4.1. Дифференциал и производная.	Дифференциал и производная функции одной переменной. Сводка формул дифференцирования. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной, неявной и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование	2
16	Дифференциальное исчисление	Тема 4.2. Частные производные и полные дифференциалы	Частные производные и полные дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных. Вычисление производных и дифференциалов сложных функций нескольких переменных. Вычисление производных неявных функций одной и нескольких переменных.	2
17	Дифференциальное исчисление	Тема 4.3. Производные и дифференциалы высших порядков.	Производные и дифференциалы высших порядков числовой функции одной переменной. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных.	2
18	Дифференциальное исчисление	Тема 4.4. Свойства дифференцируемых функций.	Свойства функций, дифференцируемых на интервале: теоремы Ролля, Коши, Лагранжа.	2
19	Дифференциальное исчисление	Тема 4.5. Формула Тейлора функции одной переменной.	Вывод формулы Тейлора для многочлена. Теорема о представлении функции одной переменной многочленом Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа и в форме Пеано. Представление некоторых функций по формуле Тейлора. Правило Лопиталя.	2
20	Дифференциальное исчисление	Тема 4.6. Исследование функций с помощью дифференциального исчисления.	Приложение формулы Тейлора к исследованию функций. Возрастание и убывание. Экстремумы функций. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования и построения графиков числовой функции одной переменной.	2
21	Дифференциальное исчисление	Тема 4.7. Локальные экстремумы функции нескольких переменных.	Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Локальные экстремумы функции нескольких переменных.	2
22	Дифференциальное исчисление	Тема 4.8. Условные экстремумы функции нескольких переменных.	Условный экстремум функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа.	2
23	Дифференциальное исчисление	Тема 4.9. Глобальные экстремумы функции нескольких переменных.	Глобальные экстремумы функции нескольких переменных.	2

24	Дифференциальное исчисление	Тема 4.10. Производная по направлению, градиент. Градиентный метод поиска экстремума функции.	Определение производной по направлению. Определение градиента скалярной функции. Примеры. Градиентный метод поиска экстремума. Постановка задачи линейного программирования.	2
			Итого за семестр:	**48**
2 семестр				
25	Интегральное исчисление	Тема 5.1. Первообразная и неопределенный интеграл.	Свойства неопределённого интеграла. Таблица основных формул интегрирования. Замена переменных в неопределенном интеграле и интегрирование по частям.	2
26	Интегральное исчисление	Тема 5.2. Интегралы по мере. Тема 5.3. Определенный интеграл.	Понятие об интеграле по мере. Основные свойства интеграла по мере. Теорема о производной интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определенном интеграле и интегрирование по частям.	2
27	Интегральное исчисление	Тема 5.4. Несобственные интегралы.	Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от не-ограниченных функций. Главное значение несобственных интегралов. Признаки сходимости несобственных интегралов. Примеры.	2
28	Интегральное исчисление	Тема 5.5. Двойной интеграл.	Геометрическая интерпретация двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых и полярных координатах.	2
29	Интегральное исчисление	Тема 5.6 Тройной интеграл.	Вычисление тройного интеграла в декартовых, цилиндрических и сферических координатах. Примеры. Общая формула замены переменных в кратных интегралах.	2
30	Интегральное исчисление	Тема 5.7. Криволинейные интегралы.	Вычисление криволинейных интегралов первого и второго рода. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.	2
31	Интегральное исчисление	Тема 5.8. Приложения интегралов в геометрии и механике.	Определение с помощью интегралов площади плоской фигуры, площади поверхности, объёма тела, массы тела, статических моментов и центров тяжести, моментов инерции.	2
32	Интегральное исчисление	Тема 5.9. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Интегралы, зависящие от параметра.	Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Понятие о специальных функциях: нормальная функция распределения, интегральный синус, косинус, логарифм. Понятие об интегралах, зависящих от параметра. Гамма-функция и ее свойства.	2

33	Дифференциальные уравнения	Тема 6.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка.	Основные понятия. Понятие об особом решении. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Геометрическое толкование дифференциального уравнения первого порядка и его решений. Метод Эйлера приближённого решения задачи Коши. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.	2
34	Дифференциальные уравнения	Тема 6.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.	Методы интегрирования линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Интегрирование уравнения Бернулли.	2
35	Дифференциальные уравнения	Тема 6.3. Уравнения в полных дифференциалах.	Интегрирование дифференциального уравнения в полных дифференциалах.	2
36	Дифференциальные уравнения	Тема 6.4. Дифференциальные уравнения высших порядков.	Задача Коши для дифференциального уравнения высшего порядка. Понятие о краевых задачах.	2
37	Дифференциальные уравнения	Тема 6.5. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.	Интегрирование дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.	2
38	Дифференциальные уравнения	Тема 6.6. Структура общего решения линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.	Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Структура решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.	2
39	Дифференциальные уравнения	Тема 6.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.	Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа решения линейных уравнений. Уравнение Эйлера.	2
40	Дифференциальные уравнения	Тема 6.8. Системы дифференциальных уравнений.	Интегрирование нормальных систем. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	2
41	Дифференциальные уравнения	Тема 6.9. Основные модели физических и химических процессов, приводящих к дифференциальным уравнениям.	Примеры физических и технических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.	2

42	Ряды	Тема 7.1. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда.	Основные понятия. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточное условие расходимости ряда. Свойства сходящихся рядов. Примеры. Геометрическая прогрессия. Ряды с положительными членами.	2
43	Ряды	Тема 7.2. Достаточные признаки сходимости числовых рядов.	Теоремы сравнения. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости ряда. Оценка остатка ряда с помощью интегрального признака.	2
44	Ряды	Тема 7.3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.	Абсолютная сходимость знакопеременных рядов. Условная сходимость знакочередующихся рядов, теорема Лейбница.	2
45	Ряды	Тема 7.4. Функциональные ряды. Тема 7.5. Степенные ряды.	Основные понятия. Область сходимости функционального ряда. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Сходимость степенных рядов, теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Теоремы о непрерывности суммы, о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных и степенных рядов.	2
46	Ряды	Тема 7.6. Ряд Тейлора. Некоторые приложения степенных рядов.	Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора. Разложение по степеням элементарных функций. Вычисление значений функции, интегралов, решение дифференциальных уравнений с использованием степенных рядов.	2
47	Ряды	Тема 7.7. Периодические функции. Гармонические колебания. Ряды Фурье. Тема 7.8. Разложение функций в ряд Фурье.	Амплитуда, частота, период и фаза колебаний. Ортогональная система функций. Разложение в обобщенный ряд Фурье по ортогональной системе функций. Тригонометрический ряд Фурье. Теорема Дирихле. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Разложение функции в ряд Фурье на полупериоде.	2
48	Ряды	Тема 7.9. Тригонометрический ряд в комплексной форме. Интеграл Фурье.	Понятие о практическом гармоническом анализе. Средняя квадратическая погрешность и минимальное свойство коэффициентов Фурье. Понятие об интеграле Фурье. Преобразование Фурье. Теорема Котельникова.	2
			Итого за семестр:	**48**
			Итого:	**96**

4.2 Содержание лабораторных занятий

Учебные занятия не реализуются.

4.3 Содержание практических занятий

№ занятия	Наименование раздела	Тема практического занятия	Содержание практического занятия (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	Количество часов / часов в электронной форме
1 семестр				
1	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Определители. Матрицы.	Вычисление определителей. Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Алгебра матриц. Вычисление обратной матрицы.	2
2	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Системы линейных уравнений. Решение с помощью обратной матрицы.	Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.	2
3	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.	Вычисление ранга матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.	2
4	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Векторы. Скалярное произведение векторов.	Линейные операции над векторами. Вычисление скалярного произведения векторов. Применение к расчётам в физике и геометрии.	2
5	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.	Вычисление векторного и смешанного произведения векторов с использованием их свойств. Применение к расчётам в механике и геометрии.	2
6	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Линейное пространство. Базис и размерность линейного пространства.	Разложение вектора по базису. Собственные значения и собственные векторы.	2
7	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Аналитическая геометрия на плоскости.	Определение неизвестных параметров кривых второго порядка. Приведение к каноническому виду уравнения кривой второго порядка. Построение кривой второго порядка.	2
8	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Аналитическая геометрия на плоскости.	Построение прямой и кривых второго порядка в декартовой системе координат. Построение кривых в полярной системе координат.	2
9	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости. Уравнение прямой в пространстве.	Нахождение различных видов уравнений плоскости по известным данным. Нахождение различных видов уравнений прямой в пространстве по известным данным. Решение задач на взаимное расположение прямой и плоскости.	2
10	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнения поверхностей второго порядка.	Определение типа поверхности по каноническому виду уравнений второго порядка. Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду. Уравнения пересечения поверхностей второго порядка с плоскостями.	2

11	Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Итоговое занятие (коллоквиум) по разделу в форме контролирующего теста.	Вычисление определителей, умножение матриц, вычисление обратной матрицы, решение систем линейных уравнений, вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, разложение вектора по базису, поиск уравнений прямой и плоскости, решение задач на взаимное расположение прямой и плоскости, приведение к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.	2
12	Введение в математический анализ	Основные виды отображений и их пределы.	Раскрытие основных неопределённостей под знаком предела.	2
13	Введение в математический анализ	Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы.	Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших величин.	2
14	Введение в математический анализ	Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы.	Применение первого и второго замечательного пределов при решении задач.	2
15	Введение в математический анализ	Непрерывность функции.	Нахождение точек разрыва функции одной переменной.	2
16	Дифференциальное исчисление	Дифференциал и производная.	Вычисление производных и дифференциалов числовой функции одной переменной. Дифференцирование параметрически заданных функций.	2
17	Дифференциальное исчисление	Частные производные и полные дифференциалы.	Частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал функции нескольких переменных. Вычисление производных сложных функций одной и нескольких переменных.	2
18	Дифференциальное исчисление	Производные и дифференциалы высших порядков.	Вычисление производных неявных функций одной и нескольких переменных. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков функции одной и нескольких переменных.	2
19	Дифференциальное исчисление	Формула Тейлора функции одной переменной. Правило Лопиталя.	Разложение функций по формуле Тейлора. Вычисление пределов по правилу Лопиталя.	2
20	Дифференциальное исчисление	Формула Тейлора функции одной переменной. Исследование функции.	Исследование функций и построение графиков. Поиск экстремумов, кривизны кривой, асимптот графика.	2
21	Дифференциальное исчисление	Локальные экстремумы функции нескольких переменных.	Вычисление локального экстремума функции нескольких переменных. Вычисление условного экстремума функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа.	2

22	Дифференциальное исчисление	Глобальные экстремумы функции нескольких переменных.	Вычисление глобального экстремума функции нескольких переменных.	2
23	Дифференциальное исчисление	Производная по направлению, градиент. Градиентный метод поиска экстремума функции.	Вычисление производной по направлению. Вычисление градиента функции.	2
24	Дифференциальное исчисление	Итоговое занятие (коллоквиум) по разделу в форме контролирующего теста.	Вычисление пределов, определение характера точек разрыва функций. Вычисление производных и исследование функции с помощью дифференциального исчисления.	2
			Итого за семестр:	**48**
2 семестр				
25	Интегральное исчисление	Первообразная и неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.	Интегрирование элементарных функций с помощью таблиц. Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной. Интегрирование неопределённых интегралов по частям.	2
26	Интегральное исчисление	Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.	Вычисление неопределённых интегралов от выражений, содержащих квадратный трехчлен.	2
27	Интегральное исчисление	Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование рациональных дробей.	Разложение рациональных дробей на сумму простейших. Вычисление неопределённых интегралов от рациональных дробей.	2
28	Интегральное исчисление	Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование иррациональных выражений.	Вычисление неопределённых интегралов от иррациональных выражений с помощью подстановок.	2
29	Интегральное исчисление	Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование тригонометрических функций.	Вычисление неопределённых интегралов от тригонометрических функций с использованием подстановок.	2
30	Интегральное исчисление	Определенный интеграл. Вычисление определенных интегралов. Несобственные интегралы.	Вычисление определенных интегралов с использованием методов интегрирования неопределённых интегралов. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление и оценки несобственных интегралов.	2

31	Интегральное исчисление	Двойной интеграл.	Вычисление двойных интегралов в декартовых и полярных координатах.	2
32	Интегральное исчисление	Тройной интеграл.	Вычисление тройных интегралов в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.	2
33	Интегральное исчисление	Криволинейные интегралы первого рода.	Вычисление криволинейных интегралов первого рода.	2
34	Интегральное исчисление	Криволинейные интегралы второго рода.	Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.	2
35	Интегральное исчисление	Итоговое занятие (коллоквиум) по разделу в форме контролирующего теста.	Вычисление определённых и неопределённых интегралов. Решение элементарных задач на геометрические и физические приложения интегрального исчисления.	2
36	Дифференциальные уравнения	Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка.	Интегрирование дифференциальных уравнений с разделёнными переменными. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Интегрирование однородных дифференциальных уравнений.	2
37	Дифференциальные уравнения	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.	Интегрирование линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Интегрирование уравнения Бернулли. Интегрирование дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.	2
38	Дифференциальные уравнения	Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.	Интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.	2
39	Дифференциальные уравнения	Структура общего решения линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.	Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью специального вида.	2
40	Дифференциальные уравнения	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.	Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных.	2
41	Дифференциальные уравнения	Системы дифференциальных уравнений.	Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.	2

42	Дифференциальные уравнения	Итоговое занятие (коллоквиум) по разделу в форме контролирующего теста.	Интегрирование дифференциальных уравнений. Решение задачи Коши.	2
43	Ряды	Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда.	Вычисление суммы ряда. Проверка необходимого признака сходимости числового ряда.	2
44	Ряды	Достаточные признаки сходимости числовых рядов.	Исследование числовых рядов с помощью достаточных признаков сходимости.	2
45	Ряды	Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.	Исследование знакопеременных рядов на абсолютную сходимость. Признак Лейбница для исследования знакочередующихся рядов.	2
46	Ряды	Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Некоторые приложения степенных рядов.	Нахождение области сходимости функционального ряда. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда. Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена. Приложение числовых рядов к приближённому вычислению интегралов.	2
47	Ряды	Периодические функции. Гармонические колебания. Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье. Тригонометрический ряд в комплексной форме. Интеграл Фурье.	Решение задач на нахождение амплитуды, частоты, периода и фазы колебаний. Теорема Дирихле. Разложение функций в ряд Фурье. Представление функции интегралом Фурье.	2
48	Ряды	Итоговое занятие (коллоквиум) по разделу в форме контролирующего теста.	Определение сходимости числового ряда. Определение сходимости знакопеременного и знакочередующегося рядов. Определение области сходимости функционального ряда. Определение радиуса сходимости степенного ряда. Разложение функции в ряд Тейлора. Разложение функции в ряд Фурье.	2
			Итого за семестр:	**48**
			Итого:	**96**

4.4. Содержание самостоятельной работы

Наименование раздела	**Вид самостоятельной работы**	**Содержание самостоятельной работы** (перечень дидактических единиц: рассматриваемых подтем, вопросов)	**Количество часов**
1 семестр			
Основы дискретной математики	Составление конспектов.	Тема 1.1 «Основы дискретной математики» и написание конспекта.	2

Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Подготовка к практическим занятиям.	Определители. Матрицы. Системы линейных уравнений. Решение с помощью обратной матрицы. Метод Гаусса. Векторы. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Базис и размерность линейного пространства. Аналитическая геометрия на плоскости. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости. Уравнение прямой в пространстве. Уравнения кривых и поверхностей второго порядка.	3
Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Подготовка к коллоквиуму.	Коллоквиум в форме контролирующего теста №1 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».	2
Введение в математический анализ	Подготовка к практическим занятиям.	Основные виды отображений и их пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции.	3
Введение в математический анализ	Составление конспектов.	Вопрос «Комплексное евклидово пространство» темы 3.1 «Метрические пространства. Отображение в метрическом пространстве».	2
Дифференциальное исчисление	Подготовка к практическим занятиям.	Дифференциал и производная. Частные производные и полные дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора функции одной переменной. Локальные экстремумы функции нескольких переменных. Глобальные экстремумы функции нескольких переменных. Производная по направлению, градиент. Градиентный метод поиска экстремума функции.	3
Дифференциальное исчисление	Подготовка к коллоквиуму.	Коллоквиум в форме контролирующего теста №2 «Пределы, производные».	2
		Итого за семестр:	**17**
		2 семестр	
Интегральное исчисление	Подготовка к практическим занятиям.	Первообразная и неопределенный интеграл. Интегралы по мере. Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Двойной интеграл. Тройной интеграл. Криволинейные интегралы. Приложения интегралов в геометрии и механике. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Интегралы, зависящие от параметра	10

Интегральное исчисление	Подготовка к коллоквиуму.	Коллоквиум в форме контролирующего теста №3 «Интегрирование».	4
Дифференциальные уравнения	Подготовка к практическим занятиям.	Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Интегрирование однородных дифференциальных уравнений. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Структура общего решения линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных. Системы дифференциальных уравнений.	10
Дифференциальные уравнения	Подготовка к коллоквиуму.	Коллоквиум в форме контролирующего теста №4 «Дифференциальные уравнения».	4
Ряды	Подготовка к практическим занятиям.	Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости числовых рядов. Знакопеременные и знакочередующиеся и ряды. Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Некоторые приложения степенных рядов. Периодические функции. Гармонические колебания. Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье. Тригонометрический ряд в комплексной форме. Интеграл Фурье.	10
Ряды	Подготовка к коллоквиуму.	Коллоквиум в форме контролирующего теста №5 «Ряды».	5
		Итого за семестр:	**43**
		Итого:	**60**

5. Перечень учебной литературы и учебно-методического обеспечения по дисциплине (модулю)

№ п/п	**Библиографическое описание**	**Ресурс НТБ СамГТУ** (ЭБС СамГТУ, IPRbooks и т.д.)
Основная литература		
1	Высшая математика. Том 1; ТетраСистемс, 2009.- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||iprbooks||28059	Электронный ресурс

2	Высшая математика. Том 2; ТетраСистемс, 2009.- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||iprbooks||28060	Электронный ресурс
Дополнительная литература		
3	Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи; ТетраСистемс, 2011.- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||iprbooks||28035	Электронный ресурс
4	Голубева, Н.Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебно-методическое пособие / Н. Д. Голубева, Н. Д. Голубева; Самарский государственный технический университет, Высшая математика и прикладная информатика.- Самара, 2020.- 56 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||3963	Электронный ресурс
5	Евдокимов, М.А. Введение в математический анализ.Теория множеств.Отображения.Теория пределов.Вычисление пределов.Непрерывность функций : учеб.пособие / М. А. Евдокимов, Л. Г. Волкова, Е. А. Райков; Самар.гос.техн.ун-т, Высшая математика и прикладная информатика.- Самара, 2013.- 140 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||870	Электронный ресурс
6	Евдокимов, М.А. Элементы теории множеств и математической логики : учеб.пособие / М. А. Евдокимов, Т. Н. Кочетова; Самар.гос.техн.ун-т, Высшая математика и прикладная информатика.- Самара, 2007.- 88 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||1894	Электронный ресурс
7	Кубышкина, С.Н. Введение в анализ. Дифференцирование функций : учеб.-метод. пособие / С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова; Самар.гос.техн.ун-т, Прикладная математика и информатика.- Самара, 2015.- 59 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||2252	Электронный ресурс
8	Математический анализ и дифференциальное уравнение. Примеры и задачи; ТетраСистемс, 2011.- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||iprbooks||28122	Электронный ресурс
Учебно-методическое обеспечение		
9	Алгебра и геометрия; Самарский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2018.- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||iprbooks||90449	Электронный ресурс
10	Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб.пособие / Г. Н. Берман .- 22-е изд..- М., Транспорт.компания, 2015.- 432 с.	Электронный ресурс
11	Евдокимов, М.А. Сборник задач по высшей математике.Тестовые методы контроля знаний : учеб. пособие / М. А. Евдокимов, Л. А. Муратова, Л. В. Лиманова; Самар.гос.техн.ун-т, Высшая математика и прикладная информатика.- Самара, 2015.- 78 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||3075	Электронный ресурс
12	Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб.пособие / Д.В.Клетеник;под ред. Н.В.Ефимова .- 17-е изд., стер..- СПб., Лань, 2010.- 223 с.	Электронный ресурс
13	Комплексные числа : практикум по высш. математике / Самар.гос.техн.ун-т, Прикладная математика и информатика; сост.: С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова.- Самара, 2011.- 28 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||43	Электронный ресурс

14	Кубышкина, С.Н. Комплексные числа. Функции комплексного переменного : учебно-методическое пособие / С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова; Самарский государственный технический университет, Прикладная математика и информатика.- Самара, 2021.- 62 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||5393	Электронный ресурс
15	Кубышкина, С.Н. Тренировочные тесты по курсу математики. Ч. 2 : учеб.-метод. пособие / С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова, Е. А. Тарасова; Самар.гос.техн.ун-т, Прикладная математика и информатика.- Самара, 2019.- 62 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||3741	Электронный ресурс
16	Сборник задач по высшей математике.Тестовые методы контроля знаний : сб.задач / Самар.гос.техн.ун-т, Высшая математика и прикладная информатика; сост. М. А. Евдокимов [и др.].- Самара, 2013.- 51 с..- Режим доступа: https://elib.samgtu.ru/getinfo?uid=els_samgtu||elib||1877	Электронный ресурс

Доступ обучающихся к ЭР НТБ СамГТУ (elib.samgtu.ru) осуществляется посредством электронной информационной образовательной среды университета и сайта НТБ СамГТУ по логину и паролю.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения

При проведении лекционных занятий используется мультимедийное оборудование.

Организовано взаимодействие обучающегося и преподавателя с использованием электронной ин-формационной образовательной среды университета.

№ п/п	Наименование	Производитель	Способ распространения
1	AdobeReader XI	AdobeSystemsIncorporated (Зарубежный)	Свободно распространяемое
2	Kaspersky Endpoint Security для бизнеса-Стандартный Russian Edition	Kasperskylab (Отечественный)	Лицензионное
3	Microsoft Office 2007 Open License Academic	Microsoft (Зарубежный)	Лицензионное
4	OpenOffice	OpenOffice (Зарубежный)	Свободно распространяемое

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем

№ п/п	Наименование	Краткое описание	Режим доступа
1	Образовательный математический сайт	http://www.exponenta.ru.	Ресурсы открытого доступа
2	"Интернет библиотека" Московского Центра непрерывного математического образования	http://ilib.mccme.ru/	Ресурсы открытого доступа
3	Сайты научно – технической библиотеки ФГБОУ СамГТУ	http://lib.sumgtu.ru/	Ресурсы открытого доступа

4	Электронно-библиотечная система IPRbooks	http://www.iprbookshop.ru/	Российские базы данных ограниченного доступа

8. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Лекционные занятия

Аудитории для лекционных занятий укомплектованы мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории (наборы демонстрационного оборудования (проектор, экран, компьютер/ноутбук), учебно-наглядные пособия, тематические иллюстрации).

Практические занятия

Аудитории для практических занятий укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения (проектор, экран, компьютер/ноутбук).

Самостоятельная работа

Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и доступом к электронной информационно-образовательной среде СамГТУ:

- читальный зал НТБ СамГТУ (ауд. 200 корпус № 8; ауд. 125 корпус № 1; ауд. 41, 31, 34, 35, Главный корпус библиотеки, ауд. 83а, 414, 416, 0209 АСА СамГТУ; ауд. 401 корпус №10);
- компьютерные классы (ауд. 208, 210 корпус № 8).

9. Методические материалы

Методические рекомендации при работе на лекции

До лекции студент должен просмотреть учебно-методическую и научную литературу по теме лекции с тем, чтобы иметь представление о проблемах, которые будут разбираться в лекции.

Перед началом лекции обучающимся сообщается тема лекции, план, вопросы, подлежащие рассмотрению, доводятся основные литературные источники. Весь учебный материал, сообщаемый преподавателем, должен не просто прослушиваться. Он должен быть активно воспринят, т.е. услышан, осмыслен, понят, зафиксирован на бумаге и закреплен в памяти. Приступая к слушанию нового учебного материала, полезно мысленно установить его связь с ранее изученным. Следя за техникой чтения лекции (акцент на существенном, повышение тона, изменение ритма, пауза и т.п.), необходимо вслед за преподавателем уметь выделять основные категории, законы и определять их содержание, проблемы, предполагать их возможные решения, доказательства и выводы. Осуществляя такую работу, можно значительно облегчить себе понимание учебного материала, его конспектирование и дальнейшее изучение.

Конспектирование лекции позволяет обработать, систематизировать и лучше сохранить полученную информацию с тем, чтобы в будущем можно было восстановить в памяти основные, содержательные моменты. Типичная ошибка, совершаемая обучающимся, дословное конспектирование речи преподавателя. Как правило, при записи «слово в слово» не остается времени на обдумывание, анализ и синтез информации. Отбирая нужную информацию, главные мысли, проблемы, решения и выводы, необходимо сокращать текст, строить его таким образом, чтобы потом можно было легко в нем разобраться. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых можно будет делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. С окончанием лекции

работа над конспектом не может считаться завершенной. Нужно еще восстановить отдельные места, проверить, все ли понятно, уточнить что-то на консультации и т.п. с тем, чтобы конспект мог быть использован в процессе подготовки к практическим занятиям, зачету, экзамену. Конспект лекции – незаменимый учебный документ, необходимый для самостоятельной работы.

Методические рекомендации при подготовке и работе на практическом занятии

Практические занятия по дисциплине проводятся в целях выработки практических умений и приобретения навыков в решении профессиональных задач.

Рекомендуется следующая схема подготовки к практическому занятию:

1. ознакомление с планом практического занятия, который отражает содержание предложенной темы;
2. проработка конспекта лекции;
3. чтение рекомендованной литературы;
4. подготовка ответов на вопросы плана практического занятия;
5. выполнение тестовых заданий, задач и др.

Подготовка обучающегося к практическому занятию производится по вопросам, разработанным для каждой темы практических занятий и (или) лекций. В процессе подготовки к практическим занятиям, необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной литературы.

Работа студентов во время практического занятия осуществляется на основе заданий, которые выдаются обучающимся в начале или во время занятия. На практических занятиях приветствуется активное участие в обсуждении конкретных ситуаций, способность на основе полученных знаний находить наиболее эффективные решения поставленных проблем, уметь находить полезный дополнительный материал по тематике занятий. Обучающимся необходимо обращать внимание на основные понятия, алгоритмы, определять практическую значимость рассматриваемых вопросов. На практических занятиях обучающиеся должны уметь выполнить расчет по заданным параметрам или выработать определенные решения по обозначенной проблеме. Задания могут быть групповые и индивидуальные. В зависимости от сложности предлагаемых заданий, целей занятия, общей подготовки обучающихся преподаватель может подсказать обучающимся алгоритм решения или первое действие, или указать общее направление рассуждений. Полученные результаты обсуждаются с позиций их адекватности или эффективности в рассмотренной ситуации.

Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы

Организация самостоятельной работы обучающихся ориентируется на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей, переход от поточного к индивидуализированному обучению с учетом потребностей и возможностей обучающегося.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной литературой, материалами периодических изданий и Интернета является наиболее эффективным методом получения дополнительных знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала. Все новые понятия по изучаемой теме необходимо выучить наизусть и внести в глоссарий, который целесообразно вести с самого начала изучения курса.

Самостоятельная работа реализуется:

- непосредственно в процессе аудиторных занятий;
- на лекциях, практических занятиях;
- в контакте с преподавателем вне рамок расписания;
- на консультациях по учебным вопросам, в ходе творческих контактов, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.;
- в библиотеке, дома, на кафедре при выполнении обучающимся учебных и практических задач.

Эффективным средством осуществления обучающимся самостоятельной работы является электронная информационно-образовательная среда университета, которая обеспечивает доступ к учебным планам, рабочим программам дисциплин (модулей), практик, к изданиям электронных

библиотечных систем.

10. Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю)

Фонд оценочных средств представлен в приложении № 1.

Приложение 1 к рабочей программе дисциплины
Б1.Б.02.01 «Математика»

Фонд оценочных средств
по дисциплине
Б1.Б.02.01 «Математика»

Код и направление подготовки (специальность)	10.03.01 Информационная безопасность
Направленность (профиль)	Комплексная защита объектов информатизации (в промышленности)
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная
Год начала подготовки	2020
Институт / факультет	Институт автоматики и информационных технологий
Выпускающая кафедра	кафедра "Электронные системы и информационная безопасность"
Кафедра-разработчик	кафедра "Прикладная математика и информатика"
Объем дисциплины, ч. / з.е.	324 / 9
Форма контроля (промежуточная аттестация)	Экзамен

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код и наименование компетенции	Результаты обучения (знать, уметь, владеть, соотнесенные с индикаторами достижения компетенции)
Общепрофессиональные компетенции	
ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	Владеть способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач
	Уметь применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач

Матрица соответствия оценочных средств запланированным результатам обучения

Код и наименование компетенции	Результаты обучения	Оценочные средства	Текущий контроль успеваемости	Промежуточная аттестация
Основы дискретной математики				
ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	**Владеть** способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	конспект	Да	Да
	Уметь применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	конспект	Да	Да
Линейная алгебра и аналитическая геометрия				
ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	**Уметь** применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
	Владеть способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
Введение в математический анализ				

ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	**Владеть** способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, конспект, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
	Уметь применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, конспект, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
Дифференциальное исчисление				
ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	**Уметь** применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
	Владеть способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
Интегральное исчисление				
ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	**Владеть** способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
	Уметь применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
Дифференциальные уравнения				

ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	**Владеть** способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
	Уметь применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
Ряды				
ОПК-2 способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	**Владеть** способностью применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да
	Уметь применять соответствующий математический аппарат для решения профессиональных задач	диагностические контрольные работы, коллоквиум, задачи практических занятий, практические и теоретические экзаменационные вопросы	Да	Да

2. Типовые контрольные задания и материалы для оценки знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения опоп

Перечень подлежащих оценке результатов обучения (показателей проявления компетенций: владений, умений, знаний) при использовании предусмотренных рабочей программой дисциплины оценочных средств, представлены в табл. 1.

2.1. Формы текущего контроля успеваемости

В рамках дисциплины предусмотрено выполнение самостоятельной работы:

- самостоятельное изучение теоретического материала (написание конспектов);
- подготовка к практическим занятиям (ПЗ);
- подготовка к коллоквиумам по разделам дисциплины в форме контролирующих тестов (КТ);
- подготовка к экзамену.

Самостоятельное изучение материала (написание конспектов)

Учебной программой дисциплины предусмотрено самостоятельное изучение следующих тем:

- «Основы дискретной математики»
- «Комплексное евклидово пространство» темы 3.1 «Метрические пространства. Отображение в метрическом пространстве».

Для поиска материалов по темам для самостоятельного изучения студент использует учебники, дополнительную литературу, ресурсы сети Интернет и проч.

Рекомендуемая литература по самостоятельно изучаемым темам предлагается из п. 5 РПД.

Самостоятельное изучение материала предполагает написание конспектов. Оценивание конспектов производится по системе зачёт/незачёт.

Задания практических занятий

Предполагается, что к каждому практическому занятию (ПЗ) студенты готовятся по следующей схеме: изучение основных положений темы, разобранной на лекциях; поиск дополнительного материала по учебникам, дополнительной литературе, ресурсам сети Интернет и проч.; изучение алгоритмов решений типовых задач; выполнение предложенных домашние задания.

Работа с дополнительной учебной и научной литературой включает в себя составление плана текста; конспектирование; самостоятельную проверку представленных математических утверждений, работу со справочниками; конспектирование научных статей заданной тематики.

Выполнение заданий ПЗ производится во время аудиторных ПЗ и оценивается по системе зачёт/незачёт.

Задания практических занятий (ПЗ)

ПЗ №1. Определители. Матрицы.

1. Вычисление определителей.
2. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
3. Алгебра матриц.
4. Вычисление обратной матрицы.

ПЗ №2. Системы линейных уравнений. Решение с помощью обратной матрицы (с разработкой занятия).

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Теоретические сведения

Рассмотрим систему *n* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Матрица системы данной системы уравнений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и, следовательно, данную систему уравнений можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

или

$$AX = B, \quad (2.2)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - матрицы - столбцы неизвестных и свободных членов.

Если матрица A - невырожденная, т.е. её определитель, а следовательно, и определитель системы уравнений (2.1), отличен от нуля $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Тогда, умножая обе части уравнения (2.2) на матрицу A^{-1} слева, получим решение системы уравнений (2.1) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

или

$$X = A^{-1}B. \quad (2.3)$$

Задание 1. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение

Запишем данную систему уравнений в матричной форме $AX = B$ или

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Т.к. $|A| \neq 0$, следовательно, матрица A - невырожденная и имеет обратную. Найдем матрицу, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение исходной системы уравнений найдем по формуле (2.3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка

Проверим правильность решения, подставив найденные значения неизвестных $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -2$ в исходную систему уравнений.

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - 3 - (-2) \equiv 2, \\ 6 \cdot 1 - 3 \cdot 3 - 2(-2) \equiv 1, \\ 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - (-2) \equiv -2. \end{cases}$$

Т.к. уравнения данной системы при подстановке найденных значений обратились в тождества, следовательно, $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -2$ - решение исходной системы уравнений.

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -2$**.**

Задание 2. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -5, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение

Запишем данную систему уравнений в матричной форме $AX = B$ или

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 70 \neq 0.$$

Т.к. $|A| \neq 0$, следовательно, матрица A - невырожденная и имеет обратную. Найдем матрицу, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -2 \\ -37 & 1 & 16 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение исходной системы уравнений найдем по формуле (2.3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -2 \\ -37 & 1 & 16 \\ 8 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = -1$**.**

Задание 3. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 = -8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение

Запишем данную систему уравнений в матричной форме $AX = B$ или

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Т.к. $|A| \neq 0$, следовательно, матрица A - невырожденная и имеет обратную. Найдем матрицу, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -17 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -9 & 14 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение исходной системы уравнений найдем по формуле (2.3):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -17 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = -1;\ x_3 = -3$.

Задание 4. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -10, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 25. \end{cases}$$

Решение

1. $$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

2. $$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -30 \neq 0.$$

3. $$A^{-1} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -17 & 33 & 13 \\ 1 & -9 & 1 \\ -14 & 36 & 16 \end{pmatrix}.$$

4. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -17 & 33 & 13 \\ 1 & -9 & 1 \\ -14 & 36 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 3;\ x_2 = -4;\ x_3 = 1$.

Задание 5. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -12, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$$

Решение

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ -7 \end{pmatrix}$$

2. $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

3. $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-14 & 8 & -10\\ -13 & 7 & -11\\ -11 & 5 & -7\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-14 & 8 & -10\\ -13 & 7 & -11\\ -11 & 5 & -7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ -12\\ -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

Ответ: $x_1=-2;\ x_2=1;\ x_3=0$.

Задание 6. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases}3x_1 - x_2 + x_3 = 2,\\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 11,\\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3.\end{cases}$$

Решение

1. $\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 11\\ 3\end{pmatrix}$.

2. $|A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=-10\neq 0$.

3. $A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ 2 & -4 & 10\\ -5 & 5 & -5\end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1 & -3 & 5\\ 2 & -4 & 10\\ -5 & 5 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 11\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$.

Ответ: $x_1=2;\ x_2=1;\ x_3=-3$.

Задание 7. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 5x_3 = 5,\\ 6x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -28,\\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 12.\end{cases}$$

Решение

1. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 6 & 3 & -4\\ 1 & -2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -28\\ 12\end{pmatrix}$.

2. $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 .$$

3. $$A^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -11 \\ -40 & 7 & 38 \\ -15 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

4. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 10 & -4 & -11 \\ -40 & 7 & 38 \\ -15 & 3 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -28 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -2;\ x_2 = -4;\ x_3 = 1$.

Задание 8. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -11. \end{cases}$$

Решение

1. $$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

2. $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 .$$

3. $$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -1;\ x_2 = -2;\ x_3 = 6$.

Задание 9. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

Решение

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0.$$

3. $$A^{-1} = -\frac{1}{153} \begin{pmatrix} -27 & -39 & -6 & 3 \\ 3 & 27 & -39 & -6 \\ -6 & -3 & 27 & -39 \\ -39 & 6 & -3 & 27 \end{pmatrix}.$$

4. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{153} \begin{pmatrix} -27 & -39 & -6 & 3 \\ 3 & 27 & -39 & -6 \\ -6 & -3 & 27 & -39 \\ -39 & 6 & -3 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 0;\ x_4 = 1$.

Задание 10. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

Решение

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

2. $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

3. $$A^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & -10 & 0 & -2 \\ -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & -10 & 0 & -2 \\ -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = -2;\ x_2 = 2;\ x_3 = -3;\ x_4 = 3$.

Контрольные вопросы

1. Что называется решением системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными?
2. При каких условиях система линейных уравнений имеет единственное решение?
3. К какой системе применим метод обратной матрицы?
4. Каковы необходимые и достаточные условия существования обратной матрицы для данной матрицы*A*?
5. Перечислите основные этапы алгоритма построения обратной матрицы.

ДКР

Вариант 1

Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Вариант 2

Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, . \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Домашнее задание

1. Теория: Ранг матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Задания для самостоятельной работы студентов

Задание 1. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и выполнить проверку:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

Задание 2. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и выполнить проверку:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, . \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Задание 3. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и выполнить проверку:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

Задание 4. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и выполнить проверку:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, . \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

Задание 5. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и выполнить проверку:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$$

Задание 6. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и выполнить проверку:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, . \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

Задание 7. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и выполнить проверку:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ + 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$$

Задание 8. Решить систему уравнений методом обратной матрицы и выполнить проверку:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, . \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

ПЗ №3. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.

1. Вычисление ранга матрицы.
2. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

ПЗ №4. Векторы. Скалярное произведение векторов (с разработкой занятия).

1. Линейные операции над векторами.
2. Вычисление скалярного произведения векторов.
3. Применение скалярно произведения векторов к расчётам в физике и геометрии.

Линейные операции над векторами

Теоретические сведения

Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ (рис. 4.1).



Рис. 4.1

Вектор характеризуется следующими элементами:

1) *начальной точкой* («точкой приложения» - точка A);

2) *направлением*;

3) *длиной* («модулем вектора» - длина отрезка AB ($|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{AB}|$)).

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым вектором* и обозначается $\boldsymbol{\theta}$. Его направление не определено.

Радиус-вектором точки M называется вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий от начала координат к данной точке M.

Векторы называют одинаково направленными (или сонаправленными), если они расположены на параллельных прямых и направлены в одну сторону. Векторы считаются *равными*, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором*, или *ортом.* Единичный вектор, сонаправленный с данным вектором $\boldsymbol{a}$, называется *ортом вектора* $\boldsymbol{a}$ и обозначается $\boldsymbol{a}^0$.

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, лежащие на параллельных прямых или на одной и той же прямой, называются *коллинеарными* ($\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$).

Три или большее количество векторов называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости (в частности лежат в одной плоскости). Нулевой вектор считается компланарным любой системе компланарных между собой векторов.

Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называется вектор, равный сумме произведений этих векторов на некоторые действительные числа λ_1, λ_2, λ_3:

$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3\boldsymbol{e}_3$$

Базисом на плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, лежащих в этой плоскости.

Базис позволяет представить вектор в виде линейной комбинации базисных векторов:

$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

Данное равенство называют *разложением вектора* $\boldsymbol{a}$ *по базису* $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, а числа λ_1, λ_2 - *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$.

Можно доказать, что такое разложение является единственным, т.е. числа λ_1, λ_2 определяются однозначно.

Базисом в пространстве называется совокупность любых трех некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Замечание. Три вектора $\boldsymbol{e}_1 = (e_{11}; e_{12}; e_{13})$, $\boldsymbol{e}_2 = (e_{21}; e_{22}; e_{23})$ и $\boldsymbol{e}_3 = (e_{31}; e_{32}; e_{33})$ образуют базис пространства, если определитель, составленный из их координат, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Базис в пространстве обладает свойством, аналогичным свойству базиса на плоскости: любой вектор $\boldsymbol{a}$ пространства можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и притом единственным образом:

$\boldsymbol{a} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3$.

Данное равенство называют *разложением вектора* $\boldsymbol{a}$ *по базису* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ а числа λ_1, λ_2, λ_3 - *координатами* вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Если заранее ясно, о каком базисе идет речь, то пишут кратко: $\boldsymbol{a} = (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$.

Базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называется *ортонормированным,* если векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$.

Вектор $\boldsymbol{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат, может быть представлен в виде $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$.

Такое представление вектора $\boldsymbol{a}$ называется его *разложением по осям координат*,или *разложением по ортам* $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Или, $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Если точка $A(x_1; y_1; z_1)$ - начало вектора, а $B(x_2; y_2; z_2)$ - его конец, то координаты вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$ равны разностям соответствующих координат точек A и B: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Длина(модуль) вектора $\boldsymbol{a}$ определяется по формуле $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Линейными называют операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число:

а) *суммой двух векторов* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, соединяющий начало вектора $\boldsymbol{a}$ с концом вектора $\boldsymbol{b}$ при условии, что вектор $\boldsymbol{b}$ приложен к концу вектора $\boldsymbol{a}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «треугольника» и «параллелограмма», представленные на рис.2 и 3 соответственно.

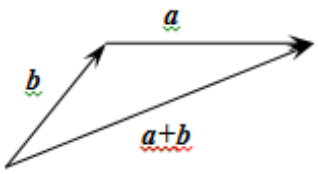


Рис. 4.1

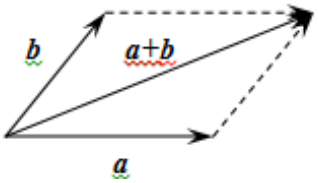


Рис. 4.2

Суммой нескольких векторов является вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом последнего при условии, что начало каждого последующего вектора совмещено с концом предыдущего– правило«многоугольника».

Если при сложении нескольких векторов конец последнего вектора совпадает с началом первого вектора, то суммой векторов будет являться нулевой вектор $\boldsymbol{\theta}$.

Правило сложения векторов обладает следующими свойствами:

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (*переместительное свойство);*
2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ *(сочетательное свойство);*
3. *существует нулевой вектор* $\boldsymbol{\theta}$ *такой, что* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a}$ *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$;
4. *для каждого вектора* $\boldsymbol{a}$ *существует противоположный ему вектор* $(-\boldsymbol{a})$ *такой, что* $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\theta}$;

б) *разностью* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ *вектора* $\boldsymbol{a}$ *и вектора* $\boldsymbol{b}$ называется такой вектор $\boldsymbol{c}$, который в сумме с вектором $\boldsymbol{b}$ дает вектор $\boldsymbol{a}$.

Из данного определения и из правила треугольника сложения векторов вытекает следующее *правило построения разности* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$: разность $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ приведенных к общему началу векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представляет собой вектор, идущий из конца вычитаемого вектора $\boldsymbol{b}$ в конец уменьшаемого

вектора $\boldsymbol{a}$. Таким образом, вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ является второй диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (первую диагональ образует сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, и направлен от конца вектора $\boldsymbol{b}$ к концу вектора $\boldsymbol{a}$;

произведением вектора $\boldsymbol{a}$ *на вещественное число* λ называется вектор $\boldsymbol{b}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, имеющий длину, равную $|\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\boldsymbol{a}$ (в случае $\lambda>0$) и противоположное направлению вектора $\boldsymbol{a}$ (в случае $\lambda<0$).

В случае, когда $\lambda=0$ или $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\theta}$, произведение $\lambda\boldsymbol{a}$ представляет собой нулевой вектор, направление которого неопределенно.

Геометрический смысл операции умножения вектора на число можно выразить так: при умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ происходит «растяжение» вектора $\boldsymbol{a}$ в λ раз (при $\lambda>1$) или сжатие в λ раз (при $0<\lambda<1$). При отрицательном λ, кроме растяжения (при $|\lambda|>1$) или сжатия (при $|\lambda|<1$), происходит еще изменение направления вектора на противоположное.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ (*распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов);*

2. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (*распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел);*

3. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ (*сочетательное свойство числовых сомножителей)*;

4. $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

Проекцией вектора $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось l называется алгебраическая величина отрезка A_1B_1, где A_1, B_1 - проекции точек A и B на данную ось (т.е. длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком «+», когда направление отрезка совпадает с положительным направлением оси l, и со знаком «-» - в противном случае).

Если φ - угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью l, то $np_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$.

Свойства проекции вектора на ось l:

1) $np_l(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n)=np_l\boldsymbol{a}_1+np_l\boldsymbol{a}_2+\ldots+np_l\boldsymbol{a}_n$;

2) $np_l(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda np_l\boldsymbol{a}$.

Действия с векторами в координатной форме:

а) сумма (разность) векторов $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и $\boldsymbol{b}=(b_x;b_y;b_z)$ определяется по формуле

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z).$$

б) произведение вектора $\vec{a}$ на число λ определяется формулой:

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x;\lambda a_y;\lambda a_z).$$

Условие коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;a_z)$ *и* $\boldsymbol{b}=(b_x;b_y;b_z)$:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

Направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$ (4.косинусы углов α,β,γ, образованных вектором $\boldsymbol{a}$ с осями координат Ox,Oy,Oz) определяются по формулам

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|};\cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|};\cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Направляющие косинусы связаны между собой соотношением

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Единичный вектор $\boldsymbol{a}^0$ (*орт* вектора $\boldsymbol{a}$ имеет координаты

$$\boldsymbol{a}^0=\left(\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|};\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|};\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right),\ \text{или,}\ \boldsymbol{a}^0=\left(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\right).$$

Нахождение единичного вектора того же направления, что и данный вектор $\boldsymbol{a}$, называется *нормированием* вектора $\boldsymbol{a}$.

Практические задания

Задача 1. Точка M - середина отрезка AB, O - произвольная точка пространства. Доказать равенство

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

Решение

Согласно условию задачи имеем $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ (рис. 4.4). Но $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$. Следовательно, $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$, $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

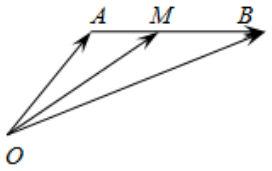


Рис. 4.4

Задача 2. Доказать, что для точки K пересечения медиан треугольника ABC выполняется равенство

$$\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right),$$

где O - произвольная точка пространства.

Решение

Пусть M - середина стороны AB треугольника ABC (рис. 4.5). Согласно $(*)$ имеем

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

Известно, что $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{KM}$. Это значит, что $\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OC}=2\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OK}\right)$, $3\overrightarrow{OK}=2\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}$.

Отсюда $3\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

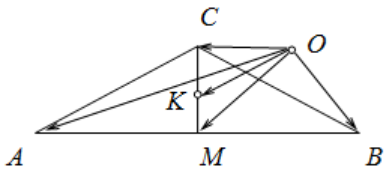


Рис. 4.5

Задача 3. Доказать, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке, которая делит каждый из этих отрезков в отношении 3:1, считая от вершины (рис. 4.6).

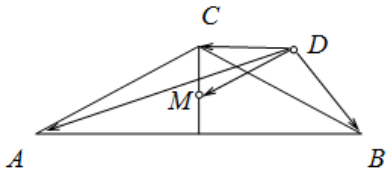


Рис.4.6

Решение

Пусть M - точка пересечения медиан грани ABC тетраэдра. Тогда согласно $(**)$ имеем $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

Разделим отрезок DM точкой K в отношении 3:1, т.е. положим $\overrightarrow{DK}=3\overrightarrow{KM}$.

Тогда $\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OD}=3\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OK}\right)$, $4\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OD}+3\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$. Откуда $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Если бы мы разделили в отношении 3:1 точкой K_1 отрезок AP, соединяющий вершину A тетраэдра с точкой пересечения медиан грани BCD, то получили бы $\overrightarrow{OK_1}-\overrightarrow{OA}=3\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OK_1}\right)$, $4\overrightarrow{OK_1}=\overrightarrow{OA}+3\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{3}$ и $\overrightarrow{OK_1}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$.

Аналогично можно проверить истинность соотношения $(***)$ для оставшихся двух вершин с точками деления K_2 и K_3. Итак, точки K, K_1, K_2, K_3 совпадают.

Задача 4. В равностороннем треугольнике ABC (рис. 4.7) M есть середина стороны BC, O - центр тяжести треугольника. Имеет ли смысл каждое из выражений: 1) $\overrightarrow{AO}:\overrightarrow{AM}$, 2) $\overrightarrow{MO}:\overrightarrow{AO}$, 3) $\overrightarrow{OA}:\overrightarrow{OB}$? В случае утвердительного ответа найти значение соответствующего выражения.

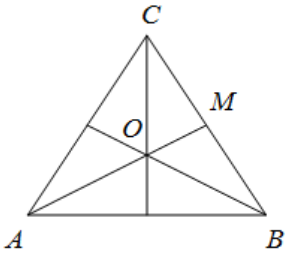


Рис. 4.7

Решение

Так как векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AM}$ коллинеарны, то отношение $\overrightarrow{AO}:\overrightarrow{AM}$ имеет смысл. Найдем значение этого отношения. Поскольку центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения его медиан и эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1 (4.считая от вершины), то

$\left|\overrightarrow{AM}\right|=3\left|\overrightarrow{OM}\right|$, $\left|\overrightarrow{AO}\right|=2\left|\overrightarrow{OM}\right|$,следовательно, $\overrightarrow{AO}:\overrightarrow{AM}=\dfrac{2\left|\overrightarrow{OM}\right|}{3\left|\overrightarrow{OM}\right|}=\dfrac{2}{3}$.

Отношение $\overrightarrow{MO}:\overrightarrow{AO}$ также имеет смысл, ибо векторы $\overrightarrow{MO}$ и $\overrightarrow{AO}$ коллинеарны. Так как эти векторы противоположно направлены, то

$\overrightarrow{MO}:\overrightarrow{AO}=-\dfrac{\left|\overrightarrow{MO}\right|}{\left|\overrightarrow{AO}\right|}=-\dfrac{1}{2}$.

Отношение $\overrightarrow{OA}:\overrightarrow{OB}$ смысла не имеет, ибо векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ неколлинеарны.

Задача 5. Показать, что $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$. В каком случае в этом соотношении имеет место знак равенства?

Решение

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то, построив их сумму, получим треугольник, длины сторон которого соответственно равны $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ и $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$. Неравенство $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ вытекает из того, что в треугольнике одна сторона меньше суммы двух других.

Равенство $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одинаково направлены.

Задача 6. Проверить, что векторы $\boldsymbol{a}=(-1;3)$ и $\boldsymbol{b}=(2;2)$ на плоскости неколлинеарны, и разложить вектор $\boldsymbol{c}=(7;-5)$ по базису $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

Решение

Проверим для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ условие коллинеарности.

Так как $-\dfrac{1}{2}\ne\dfrac{3}{2}$, то векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Следовательно, они образуют базис на плоскости.

Пусть $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$. Если рассматривать данное равенство в координатной форме, то получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}-x+2y=7;\\ 3x+2y=-5.\end{cases}$$

Решив ее, находим $x=-3$, $y=2$. Итак, $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.

Ответ: $\boldsymbol{c}=-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$

Задача 7. Даны точки $A(2;-1;-3)$ и $B(1;5;3)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Решение

Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$:
$\overrightarrow{AB}=(1-2;5-(-1);3-(-3))=(-1;6;6)$; $\overrightarrow{BA}=(2-1;-1-5;-3-3)=(1;-6;-6)$.

Задача 8. Даны векторы $\boldsymbol{a}=(1;-2;3)$, $\boldsymbol{b}=(2;1;-4)$. Найти векторы $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q}=5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$.

Решение

По формуле (4.6) находим координаты векторов $\boldsymbol{c}=(c_x;c_y;c_z)$ и $\boldsymbol{d}=(d_x;d_y;d_z)$:
$c_x=a_x+b_x=1+2=3$; $c_y=a_y+b_y=-2+1=-1$; $c_z=a_z+b_z=3+(-4)=-1$; $\boldsymbol{c}=(3;-1;-1)$.
$d_x=a_x-b_x=1-2=-1$; $d_y=a_y-b_y=-2-1=-3$; $d_z=a_z-b_z=3-(-4)=7$;
$\boldsymbol{d}=(-1;-3;7)$.
Находим координаты векторов $\boldsymbol{p}=(p_x;p_y;p_z)$ и $\boldsymbol{q}=(q_x;q_y;q_z)$:
$p_x=3a_x+2b_x=3\cdot1+2\cdot2=7$; $p_y=3a_y+2b_y=3\cdot(-2)+2\cdot1=-4$;
$p_z=3a_z+2b_z=3\cdot3+2\cdot(-4)=1$; $\boldsymbol{p}=(7;-4;1)$.
$q_x=5a_x-4b_x=5\cdot1-4\cdot2=-3$; $q_y=5a_y-4b_y=5\cdot(-2)-4\cdot1=-14$;
$q_z=5a_z-4b_z=5\cdot3-4\cdot(-4)=31$; $\boldsymbol{q}=(-3;-14;31)$.

Ответ: $\boldsymbol{c}=(3;-1;-1)$; $\boldsymbol{d}=(-1;-3;7)$.; $\boldsymbol{p}=(7;-4;1)$; $\boldsymbol{q}=(-3;-14;31)$.

Задача 9. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$.

Решение

Так как одна из диагоналей параллелограмма является суммой векторов, на которых он построен, а другая - их разностью, то найдём длины его диагоналей, как модули векторов $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.
Координаты векторов $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ находим по формуле (4.6): $\boldsymbol{c}=(3+1;1-1;-1-2)=(4;0;-3)$;
$\boldsymbol{d}=(3-1;1-(-1);-1-(-2))=(2;2;1)$;
$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$; $|\boldsymbol{d}|=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$.

Ответ:5; 3.

Задача 10. Определить, при каких значениях α и β векторы $\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$ коллинеарны?

Решение

Из условия коллинеарности векторов следует: $\frac{\alpha}{-2}=\frac{-3}{\beta}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=1;\beta=6.$

Ответ: $\alpha=1;\beta=6$.

Задача 11. Найти длину вектора $\boldsymbol{a} = (2;-2;1)$ и его направляющие косинусы.

Решение

По формуле (4.4) находим длину вектора $\boldsymbol{a}$: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$. Найдем направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$: $\cos\alpha = \frac{2}{3}; \cos\beta = -\frac{2}{3}; \cos\gamma = \frac{1}{3}$.

Ответ: $|\boldsymbol{a}| = 3;\ \cos\alpha = \frac{2}{3}; \cos\beta = -\frac{2}{3}; \cos\gamma = \frac{1}{3}$.

Задача 12. Вектор $\boldsymbol{a}$ составляет с осью ординат и осью аппликат углы в 60°. Найти острый угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и осью абсцисс.

Решение

$\beta = \gamma = 60^\circ$, поэтому $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2}$. Подставляя эти значения в формулу, получим: $\cos^2\alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ или $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$, откуда $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Таким образом, $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 = 135^\circ$, но α_2 не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $\alpha = 45^\circ$.

Ответ: $\alpha = 45^\circ$.

Задача 13. Найти единичный вектор $\boldsymbol{a}^0$ для вектора $\boldsymbol{a} = \{3;4;-12\}$.

Решение

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$. $\boldsymbol{a}^0 = \left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right)$.

Ответ: $\boldsymbol{a}^0 = \left(\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\right)$.

Задача 14. Найти проекцию суммы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{d}$ на ось l, если $|\boldsymbol{a}| = 5$, $|\boldsymbol{b}| = 6$, $|\boldsymbol{c}| = 8$, $|\boldsymbol{d}| = 12$, а углы между и l равны 0, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{\pi}{3}$.

Решение

$$np_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{d}) = np_l\boldsymbol{a} + np_l\boldsymbol{b} + np_l\boldsymbol{c} - 2np_l\boldsymbol{d} = |\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a};l) + |\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{b};l) + |\boldsymbol{c}|\cos(\boldsymbol{c};l) -$$
$$-2|\boldsymbol{d}|\cos(\boldsymbol{d};l) = 5\cos 0 + 6\cos\frac{2\pi}{3} + 8\cos\pi - 2\cdot 12\cos\frac{\pi}{3} = 5 + 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 8 - 24\cdot\frac{1}{2} = -18.$$

Ответ: -18.

Задача 15. Даны проекции силы F на координатные оси: $X=4$, $Y=4$, $Z=-4\sqrt{2}$. Найти величину силы $\boldsymbol{F}$ и направление ее действия.

Решение

Вектор $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{F}$ по условию имеет координаты $X=4$, $Y=4$, $Z=-4\sqrt{2}$. Величина силы F равна модулю вектора $\vec{F}$:

$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=\sqrt{4^2+4^2+(-4\sqrt{2})^2}=8$.

Направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{F}$:

$\cos\alpha=\frac{4}{8}=\frac{1}{2};\cos\beta=\frac{4}{8}=\frac{1}{2};\cos\gamma=\frac{-4\sqrt{2}}{8}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, сила $\boldsymbol{F}=8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha=60^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=135^\circ$.

Ответ:8.

Вычисление скалярного произведения векторов

Теоретические сведения

Скалярное произведениевекторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ - это число, определяемое по формуле

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$,

где φ - угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Формула (4.13) может быть записана в виде

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot np_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot np_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$

(так как $|\boldsymbol{b}|\cos\varphi=np_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$, а $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi=np_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$).

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и $\boldsymbol{b}=(b_x;b_y;b_z)$, *заданных координатами* вычисляется по формуле

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Свойства скалярного произведения:

1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$;

4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ (4.*скалярный квадрат* вектора $\boldsymbol{a}$), в частности $\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2$;

5) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$ 1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$; 2) $\boldsymbol{a}=0$ или $\boldsymbol{b}=0$, в частности $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

Условие ортогональности ненулевых векторов $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;a_z)$ *и* $\boldsymbol{b}=(b_x;b_y;b_z)$:

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

Практические задания

Задача 16. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=8$, $|\boldsymbol{b}|=5$, найти скалярное произведение этих векторов.

Решение

По определению скалярного произведения находим:

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\varphi=8\cdot5\cdot\frac{1}{2}=20$.

Ответ:20.

Задача 17. Даны два вектора: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$. Найти скалярное произведение этих векторов и угол между ними.

Решение

По формуле (4.12) находим: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot2+(-2)\cdot(-2)+2\cdot(-1)=4$.

Так как $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$ и $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$, то получим: $\cos(\hat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}})=\frac{4}{3\cdot3}=\frac{4}{9}\Rightarrow(\hat{\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}})=\arccos\left(\frac{4}{9}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\frac{4}{9}\right)$.

Задача 18. При каком значении λ векторы $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+\lambda\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ взаимно перпендикулярны?

Решение

Условие перпендикулярности (4.16) в данном случае запишется так: $4\lambda+2\lambda+5\cdot(-6)=0$ или $6\lambda-30=0$, откуда $\lambda=5$.

Ответ: $\lambda=5$.

Задача 19. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}=(1;2;-3)$ и удовлетворяющий условию $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=28$.

Решение

Принимая во внимание условие коллинеарности двух векторов (4.8), заключаем, что $\boldsymbol{x}=(\lambda;2\lambda;-3\lambda)$, где λ - пока неизвестный коэффициент. Так как $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=28$, то находим: $1\cdot\lambda+2\cdot2\lambda+(-3)\cdot(-3\lambda)=28$ или $14\lambda=28$, откуда $\lambda=2\Rightarrow\boldsymbol{x}=(2;4;-6)$.

Ответ: $\boldsymbol{x}=(2;4;-6)$.

Применение скалярно произведения векторов к расчётам в физике и геометрии

Теоретические сведения

а) *угол между векторами* $\boldsymbol{a}=(a_x;a_y;a_z)$ и $\boldsymbol{b}=(b_x;b_y;b_z)$:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}};$$

б) *проекция вектора* $\boldsymbol{a} = (a_x; a_y; a_z)$ на направление, заданное вектором $\boldsymbol{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$np_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}};$$

в) *работа постоянной силы* $\boldsymbol{F}$ при прямолинейном перемещении материальной точки из положения A в положение B вычисляется по формуле

$$A = \boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

Практические задания

Задача 20. Вычислить, какую работу производит сила $\boldsymbol{F} = (2;-1;-4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M(1;-2;3)$ в положение $N(5;-6;1)$?

Решение

Найдем вектор $\overrightarrow{MN}$ по формуле (4.3): $\overrightarrow{MN} = (4;-4;-2)$:
$A = \boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{MN} = 2\cdot 4 + (-1)(-4) + (-4)(-2) = 20$ (ед. работы).

Ответ:*A* = 20 (ед. работы).

Задача 21. Даны силы $\boldsymbol{M} = (3;-4;2)$, $\boldsymbol{N} = (2;3;-5)$ и $\boldsymbol{P} = (-3;-2;4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_1(5;3;-7)$ в положение $M_2(4;-1;-4)$?

Решение

Найдем координаты вектора по формуле (4.3): $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1;-4;3)$ и равнодействующую сил $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{P}$: $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{N}+\boldsymbol{P} = (3+2-3;-4+3-2;2-5+4) = (2;-3;1)$.
Тогда по формуле (4.19) находим работу, которую производит равнодействующая этих сил: $A = 2\cdot(-1) + (-3)(-4) + 1\cdot 3 = 13$ (ед. работы).

Ответ:*A* = 13 (ед. работы).

Задача 22. Дан треугольник с вершинами $A(-3;5;6)$, $B(1;-5;7)$, $C(8;-3;-1)$. Найти внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

Решение

Внутренний угол треугольника при вершине A равен углу между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а внешний угол при вершине C равен углу между векторами $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
Находим координаты указанных векторов: $\overrightarrow{AB} = (4;-10;1)$, $\overrightarrow{AC} = (11;-8;-7)$, $\overrightarrow{CB} = (-7;-2;8)$.

С помощью формулы (4.17) находим косинусы углов:

$$\cos\angle A=\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{4\cdot 11+(-10)(-8)+1\cdot(-7)}{\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}\cdot\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=\frac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}}=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\angle C=\cos(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AC}})=\frac{(-7)\cdot 11+(-2)(-8)+8(-7)}{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2+8^2}\cdot\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=\frac{-117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Следовательно, $\angle A=45^\circ$, $\angle C=135^\circ$.

Ответ: $\angle A=45^\circ$, $\angle C=135^\circ$.

Задача 23. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5;3;4)$, $B(-1;-7;5)$, $C(6;-5;-3)$, $D(2;5;-4)$ есть квадрат.

Решение

Находим векторы: $\overrightarrow{AB}=(4;-10;1)$, $\overrightarrow{BC}=(7;2;-8)$, $\overrightarrow{DC}=(4;-10;1)$, $\overrightarrow{AD}=(7;2;-8)$. Сравнивая координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$, заключаем, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Так как $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}=\sqrt{117}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{7^2+2^2+(-8)^2}=\sqrt{117}$, то $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|$.

Поскольку $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\cdot 7+(-10)\cdot 2+1\cdot(-8)=0$, то $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$.

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ - квадрат.

Задача 24. Даны три вектора: $\boldsymbol{a}=(2;-1;3)$, $\boldsymbol{b}=(4;3;-5)$, $\boldsymbol{c}=(7;-2;-6)$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условиям $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=8$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=10$.

Решение

Пусть искомый вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x}=(x;y;z)$. Тогда составим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}2x-y+3z=8;\\4x+3y-5z=0;\\7x-2y-6z=10.\end{cases}$$

Решим данную систему методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3\\4&3&-5\\7&-2&-6\end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot(-6)+4\cdot(-2)\cdot 3+(-1)\cdot(-5)\cdot 7-7\cdot 3\cdot 3-4\cdot(-1)\cdot(-6)-(-2)\cdot(-5)\cdot 2=$$

$$=-36-24+35-63-24-20=-132;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}8&-1&3\\0&3&-5\\10&-2&-6\end{vmatrix}=8\cdot 3\cdot(-6)+0\cdot(-2)\cdot 3+(-1)\cdot(-5)\cdot 10-10\cdot 3\cdot 3-0\cdot(-1)\cdot(-6)-(-2)\cdot(-5)\cdot 8=$$

$$=-144+50-90-80=-264;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 7 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot(-6) + 4\cdot 10\cdot 3 + 8\cdot(-5)\cdot 7 - 7\cdot 0\cdot 3 - 4\cdot 8\cdot(-6) - 10\cdot(-5)\cdot 2 =$$

$$= 120 - 280 + 192 + 100 = 132;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 4 & 3 & 0 \\ 7 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 10 + 4\cdot(-2)\cdot 8 + (-1)\cdot 0\cdot 7 - 7\cdot 3\cdot 8 - 4\cdot(-1)\cdot 10 - (-2)\cdot 0\cdot 2 =$$

$$= 60 - 64 - 168 + 40 = -132;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-264}{-132} = 2;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{132}{-132} = -1;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-132}{-132} = 1.$$

Следовательно, искомый вектор $\boldsymbol{x}$ имеет координаты $\boldsymbol{x} = (2;-1;1)$.

Ответ: $\boldsymbol{x} = (2;-1;1)$.

ДКР

Вариант 1

1. Вектор $\boldsymbol{a}$ составляет с осями Oy и Oz углы 60° и 120°. Какой острый угол он составляет с осью Ox ?

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$. Найти координаты его четвертой вершины.

3. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Определить $np_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ и $np_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

Вариант 2

1. Даны три силы: $\boldsymbol{F}_1 = (2;-5;1)$, $\boldsymbol{F}_2 = (1;2;-6)$, $\boldsymbol{F}_3 = (-4;-3;3)$, приложенные в одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $M(4;2;-8)$ в точку $N(3;-2;-5)$?

2. Найти длину вектора $\boldsymbol{a} = (-6;0;8)$ и его направляющие косинусы.

3. Вектор $\boldsymbol{a} = (-3;\alpha;4)$ параллелен вектору $\boldsymbol{b} = (1;-7;\beta)$. Найти $\alpha\cdot\beta$.

Домашнее задание

1. Векторное и смешанное произведение векторов.

2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. №№ 795, 796, 802, 815, 817, 819, 820, 824, 826, 828, 837.

ПЗ №5. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.

1. Вычисление векторного и смешанного произведения векторов с использованием их свойств.
2. Применение к расчётам в механике и геометрии.

ПЗ №6. Линейное пространство. Базис и размерность линейного пространства.

Разложение вектора по базису. Собственные значения и собственные векторы.

ПЗ №7. Аналитическая геометрия на плоскости.

1. Определение неизвестных параметров кривых второго порядка.
2. Приведение к каноническому виду уравнения кривой второго порядка.
3. Построение кривой второго порядка.

ПЗ №8. Аналитическая геометрия на плоскости.

1. Построение прямой и кривых второго порядка в декартовой системе координат.
2. Построение кривых в полярной системе координат.

ПЗ №9. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости (с разработкой занятия).

1. Нахождение различных видов уравнений плоскости по известным данным.
2. Нахождение различных видов уравнений прямой в пространстве по известным данным.
3. Решение задач на взаимное расположение прямой и плоскости.

Теоретические сведения

1. *Уравнение плоскости в векторной форме* имеет вид $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}^0 = p$, где $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ - радиус-вектор текущей точки $M(x;y;z)$ плоскости; $\boldsymbol{n}^0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$ - единичный нормальный вектор плоскости; α,β,γ - углы, образованные вектором с осями координат Ox, Oy, Oz; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы, p - расстояние от плоскости до начала координат.

При переходе к координатам это уравнение принимает вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (9.1)$$

и называется *нормальным уравнением плоскости.*

2. *Уравнение* плоскости может быть записано также в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (9.2)$$

если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Это уравнение называется *общим уравнением плоскости*. Здесь A, B, C можно рассматривать как координаты некоторого вектора $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} = (A, B, C)$, перпендикулярного плоскости. Этот вектор называется *нормальным вектором плоскости.* Для приведения общего уравнения плоскости к нормальному виду все члены уравнения умножают на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак перед радикалом противоположен знаку свободного члена D в общем уравнении плоскости.

3. *Частные* случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением.

1. а) $A = 0$, $By + Cz + D = 0$; плоскость параллельна оси Ox;

б) $B = 0$, $Ax + Cz + D = 0$; плоскость параллельна оси Oy;

в) $C = 0$, $Ax + By + D = 0$; плоскость параллельна оси Oz.

Полезно запомнить *правило*: *плоскость параллельна той координатной оси, переменной которой нет в уравнении.*

2. а) $A = B = 0$, $Cz + D = 0$; плоскость параллельна плоскости xOy;

б) $A = C = 0$, $By + D = 0$; плоскость параллельна плоскости xOz;

в) $B = C = 0$, $Ax + D = 0$; плоскость параллельна плоскости yOz.

Правило: *плоскость параллельна той координатной плоскости, переменные которой отсутствуют в уравнении.*

3. а) $D = 0$, $Ax + By + Cz = 0$; плоскость проходит через начало координат.

Правило: *равенство нулю свободного члена говорит о том, что плоскость проходит через начало координат.*

б) $A = D = 0$, $Bx + Cz = 0$; плоскость проходит через ось Ox;

в) $B = D = 0$, $Ax + Cz = 0$; плоскость проходит через ось Oy;

г) $C = D = 0$, $Ax + By = 0$; плоскость проходит через ось Oz.

4. а) $A = B = D = 0$; $Cz = 0$; совпадает с плоскостью xOy $(z = 0)$;

б) $A = C = D = 0$; $By = 0$; совпадает с плоскостью xOz $(y = 0)$;

в) $B = C = D = 0$; $Ax = 0$; совпадает с плоскостью yOz $(x = 0)$.

Уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{9.3}$$

называется *уравнением плоскости в отрезках на осях.* В нем a, b, c - соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями Ox, Oy и Oz (Рис. 9.1).

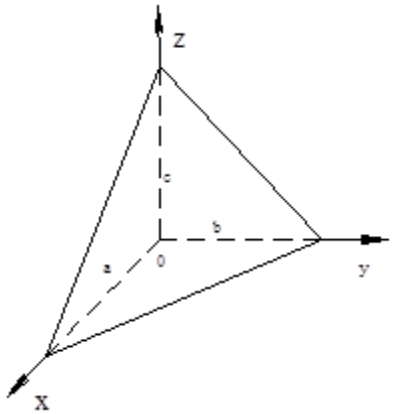


Рис. 9.1

4. Уравнение *плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и перпендикулярной вектору* $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{9.2}$$

5. Уравнение *плоскости проходящей через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9.3}$$

6. Расстояние *от точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *до плоскости* (9.1) вычисляется формуле

$$d = |x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p|,$$

а до плоскости (9.2) - по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Отклонением δ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от плоскости называется число $(+d)$, если эта точка и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, и число $(-d)$, если они лежат по одну сторону от данной плоскости (если точка лежит на самой плоскости, то отклонение равно нулю).

Отклонение δ точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от плоскости (9.1) определяется формулой

$$\delta = \pm(x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p),$$

или,

$$\delta = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где знак следует выбрать противоположным знаку D.

Очевидно, $d = |\delta|$.

Таким образом, можно сформулировать ***правило***: *чтобы найти отклонение точки от плоскости нужно в левую часть нормального уравнения плоскости подставить вместо текущих координат координаты данной точки.*

Для вычисления расстояния от точки до плоскости следует взять абсолютную величину полученного отклонения.

7. Под *углом между двумя плоскостями*

$$(\alpha):\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$(\beta):\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол φ между нормальными векторами данных плоскостей $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ равен одному из этих углов (рис. 9.2), поэтому:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности двух плоскостей, заданных уравнениями (α) и (β), определяется как условие параллельности их нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ (рис.2.3):

$$\boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей определяется как условие перпендикулярности их нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ (рис. 9.4):

$$\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0,$$

т.е.

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

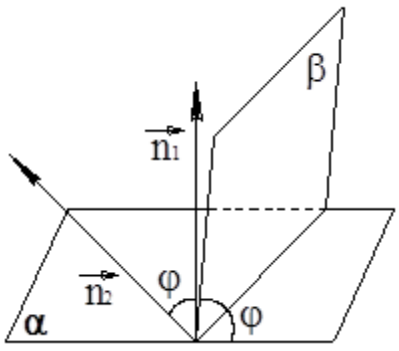


Рис. 9.2

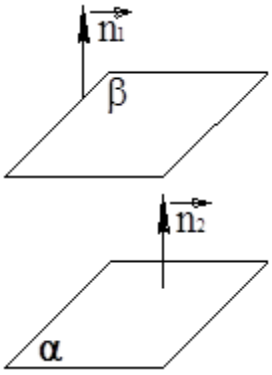


Рис. 9.3

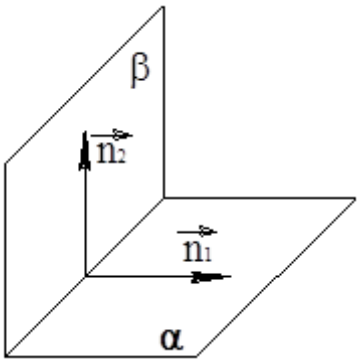


Рис.9.4

Практические задания

Задание 1. Определить координаты какого-нибудь нормального вектора каждой из следующих плоскостей. В каждом случае написать общее выражение координат произвольного нормального вектора:

1) $2x-y-2z+5=0$; 2) $x+5y-z=0$; 3) $3x-2y-7=0$;
4) $5y-3z=0$; 5) $x+2=0$; 6) $y-3=0$.

Ответ: 1) $\boldsymbol{n}=(2;-1;-2)$, $\vec{n}=(2\lambda;-\lambda;-2\lambda)$; 2) $\boldsymbol{n}=(1;5;-1)$, $\boldsymbol{n}=(\lambda;5\lambda;-\lambda)$;
3) $\boldsymbol{n}=(3;-2;0)$, $\boldsymbol{n}=(3\lambda;-2\lambda;0)$; 4) $\boldsymbol{n}=(0;5;-3)$, $\boldsymbol{n}=(0;5\lambda;-3\lambda)$;
5) $\boldsymbol{n}=(1;0;0)$, $\boldsymbol{n}=(\lambda;0;0)$; 6) $\boldsymbol{n}=(0;1;0)$, $\boldsymbol{n}=(0;\lambda;0)$.

Задание 2. Даны точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение

Так как плоскость должна быть перпендикулярна вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, то $\overrightarrow{M_1M_2}$ является нормальным вектором к этой плоскости. $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_{M_2}-x_{M_1};y_{M_2}-y_{M_1};z_{M_2}-z_{M_1})$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;-1;-3)$. Подставляя в уравнение (9.3) значения $A=1$, $B=-1$, $C=-3$ (11.координаты нормального вектора) и координаты точки $M_1(3;-1;2)$, получим $(x-3)-(y+1)-3(z-2)=0$.
Раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим искомое уравнение:
$x-y-3z+2=0$.

Ответ: $x-y-3z+2=0$.

Задание 3. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}=(2;-1;4)$ и проходящей через точку $M_0(5;2;-3)$. Лежат ли на этой плоскости точки $P(1;2;-1)$, $Q(4;5;1)$, $R(-6;2;-3)$?

Решение

Подставляя в уравнение значения $A=2$, $B=-1$, $C=4$, $x_0=5$, $y_0=2$, $z_0=-3$, получим $2(x-5)-(y-2)+4(z+3)=0$, или $2x-y+4z+4=0$.
Выясним, лежат ли точки P, Q и R на данной плоскости. Подставляя последовательно координаты этих точек в левую часть последнего уравнения, получим
$2\cdot1-1\cdot2+4(-1)+4=0$; $2\cdot4-1\cdot5+4\cdot1+4>0$; $2(-6)-1\cdot2+4(-3)+4<0$.
Следовательно, точка P лежит на данной плоскости. Точки Q и R плоскости не принадлежат. Они находятся по разные стороны от нее, так как плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ разбивает пространство на два подпространства, для точек одного из них $Ax+By+Cz+D<0$, для точек другого $Ax+By+Cz+D>0$.

Ответ: уравнение плоскости $2x-y+4z+4=0$. Точка P лежит в плоскости, точки Q и R не лежат.

Задание 4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(1;3;-2)$,

$M_2(4;-5;6)$, $M_3(-3;1;2)$.

Решение

По формуле(11.19) имеем

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 4-1 & -5-3 & 6+2 \\ -3-1 & 1-3 & 2+2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 3 & -8 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая последний определитель по элементам первой строки, получим

$$(x-1)\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 8x+22y+19z-36=0.$$

Ответ: $8x+22y+19z-36=0$.

Задание 5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;5;-2)$ параллельно плоскости $4x-5y-z+1=0$.

Решение

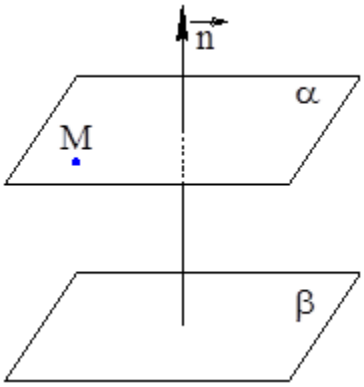


Рис. 9.5

Так как данная плоскость параллельна искомой, то нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\boldsymbol{n}=(4;-5;-1)$ данной плоскости (рис. 9.5). Подставляя координаты вектора и точки $M(1;5;-2)$ в формулу, получим $4(x-1)-5(y-5)-(z+2)=0$; $4x-4-5y+25-z-2=0$; $4x-5y-z+19=0$.

Ответ: $4x-5y-z+19=0$.

Задание 6. Определить, при каких значениях l и m уравнения $2x+ly+3z-5=0$ и $mx-6y-6z+2=0$ определяют параллельные плоскости.

Решение

Согласно условию параллельности плоскостей, имеем $\frac{2}{m}=\frac{l}{-6}=\frac{-3}{6}$, или $\frac{2}{m}=\frac{l}{-6}=-\frac{1}{2}$, $l=3$, $m=-4$.

Ответ: $l=3$, $m=-4$.

Задание 7. Определить, при каком значении l уравнения $3x-5y+lz-3=0$ и $x+3y+2z+5=0$ определяют перпендикулярные плоскости.

Решение

Согласно условию перпендикулярнности нормальных векторов плоскостей, имеем $3-15+2l=0$ или $l=6$.

Ответ: $l=6$**.**

Задание 8. Найти угол между плоскостями $x+y\sqrt{2}+z-1=0$ и $x+y\sqrt{2}-z+3=0$.

Решение

$\cos\varphi=\dfrac{1\cdot1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1(-1)}{\sqrt{1+2+1}\cdot\sqrt{1+2+1}}=\dfrac{1}{2}$.Следовательно, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Задание 9. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x+2y-2z+7=0$ и удаленной от точки $M(4;3;-2)$ на расстоянии $d=7$.

Решение

Уравнение искомой плоскости ищем в виде $x+2y-2z+D=0$.

Расстояние от точки M до этой плоскости, будет следующим: $d=\dfrac{|4+2\cdot3-2(-2)+D|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{|14+D|}{3}$.

Так как по условию $d=7$, то для определения D получим уравнение $7=\dfrac{|14+D|}{3}$ или $21=\pm(14+D)$, откуда $D_1=7$ и $D_2=-35$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две плоскости: $x+2y-2z+7=0$ и $x+2y-2z-35=0$.Первая плоскость совпадает с данной плоскостью.

Ответ*:* $x+2y-2z-35=0$.

Задание 10. Уравнение плоскости $2x+3y-6z+21=0$ привести к нормальному виду.

Решение

Находим нормирующий множитель (который берем со знаком “минус”, поскольку $D=21>0$): $\mu=-\dfrac{1}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=-\dfrac{1}{7}$.

Умножая обе части данного уравнения на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение плоскости: $-\dfrac{2}{7}x-\dfrac{3}{7}y+\dfrac{6}{7}z-3=0$.

Ответ*:* $-\dfrac{2}{7}x-\dfrac{3}{7}y+\dfrac{6}{7}z-3=0$.

Задание 11. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, опущенного из начала

координат на плоскость $10x-2y-11z+45=0$.

Решение

Уравнение плоскости приведем к нормальному виду. Находим сначала нормирующий множитель. Поскольку $D=45>0$, в формуле нужно взять знак минус. Получаем $\mu=-\frac{1}{\sqrt{10^2+(-2)^2+(-11)^2}}=-\frac{1}{15}$.

Умножая обе части данного уравнения плоскости на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение $-\frac{10}{15}x+\frac{2}{15}y+\frac{11}{15}z-\frac{45}{15}=0$ или $-\frac{2}{3}x+\frac{2}{15}y\frac{11}{15}z-3=0$.

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (9.1), находим: $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$, $p=3$.

Ответ: $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{15}$, $\cos\gamma=\frac{11}{15}$, $p=3$.

Задание 12. Определить, какие из следующих уравнений плоскостей являются нормальными:

1) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$; 2) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z-2=0$;

3) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0$; 4) $y-4=0$; 5) $x+6=0$.

Решение

Для того, чтобы уравнение плоскости было нормальным, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) коэффициент свободного члена должен быть отрицателен;

2) чтобы коэффициенты перед неизвестными можно было «выдать» за направляющие косинусы, необходимо выполнение условия справедливого для направляющих косинусов:

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Проверяем эти условия на данных уравнениях:

1) не выполняется первое условие;

2) первое условие выполняется, проверяем второе:

$\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\neq 1\Rightarrow$ условие не выполняется;

3) первое условие выполняется, проверяем второе:

$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=1\Rightarrow$ условие выполняется;

4) первое условие выполняется, проверяем второе:

$1^2+0+0=1\Rightarrow$ условие выполняется;

5) не выполняется первое условие.

Ответ: 3), 4).

Задание 13. Определить, лежат ли точка $M(1;1;-9)$ и начало координат по одну или по разные стороны от плоскости $2x-2y+z+12=0$.

Решение

Уравнение плоскости приведем к нормальному виду. Так как $D=12>0$, то в формуле (11.3) нужно взять знак "минус", т.е. $\mu=-\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=-\frac{1}{3}$.

Умножая обе части уравнения на нормирующий множитель, получим $-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-4=0$.

Подставляя координаты точки M в последнее уравнение, находим отклонение δ: $\delta=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot(-9)-4=-1<0$.

Поскольку $\delta<0$, то согласно п. 7 теории, точка M и начало координат лежат по одну сторону от данной плоскости.

Ответ: точка M и начало координат лежат по одну сторону от данной плоскости.

Задание 14. Найти расстояние между параллельными плоскостями $x-2y+3z+7=0$ и $x-2y+3z-1=0$.

Решение

Чтобы решить задачу, достаточно взять любую точку на одной из плоскостей и вычислить ее расстояние до другой плоскости. Выберем на второй плоскости точку $(1;0;0)$.

Приведем первое уравнение плоскости к нормальному виду, для этого умножим его на нормирующий множитель (так как $D=7>0$, то в формуле нужно взять знак «минус»): $\mu=-\frac{1}{\sqrt{1+4+9}}=-\frac{1}{\sqrt{14}}$.

Нормальное уравнение плоскости будет иметь вид $-\frac{1}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y-\frac{3}{\sqrt{14}}z-\frac{7}{\sqrt{14}}=0$

Подставим координаты точки $(1;0;0)$ в это уравнение и найдем отклонение δ: $\delta=\frac{-1+2\cdot0+3\cdot0-7}{\sqrt{14}}=-\frac{8}{\sqrt{14}}$.

Так как $d=|\delta|$, см. п. 7 теории, то искомое расстояние между плоскостями будет равно $d=\frac{8}{\sqrt{14}}$.

Заметим, что так как $\delta<0$, то вторая плоскость и начало координат расположены по одну сторону от первой плоскости.

Ответ: $d=\frac{8}{\sqrt{14}}$.

Задание 15. Определить отрезки, отсекаемые плоскостью $2x+8y-3z-4=0$ на осях координат. Сделать чертеж.

Решение

Переписав уравнение в виде $2x+8y-3z=4$ и разделив обе его части на 4, получим $\frac{x}{2}+2y-\frac{3}{4}z=1$ или $\frac{x}{2}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{-\frac{4}{3}}=1$.

Находим: $a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{4}{3}$.Согласно п. 4 теории плоскость будет проходить через точки $(2;0;0)$, $\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $\left(0;0;-\frac{4}{3}\right)$ (рис. 9.6).

Ответ: $a=2$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{4}{3}$.

Задание 16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(7;-5;1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

Решение

Используя уравнение плоскости в отрезках, в котором по условию $a=b=c$, имеем $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. Координаты точки A удовлетворяют уравнению искомой плоскости, поэтому выполняется равенство $\frac{7}{a}+\frac{-5}{a}+\frac{1}{a}=1$, откуда $a=3$. Итак, получаем уравнение $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ или $x+y+z-3=0$ (рис. 9.7).

Ответ: $x+y+z-3=0$.

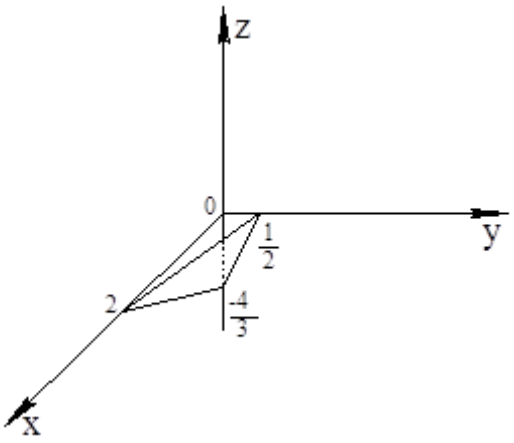


Рис. 9.6

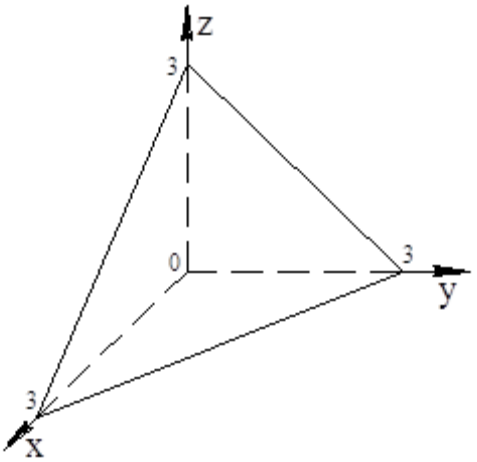


Рис. 9.7

Задание 17. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;4)$ и $B(3;2;-1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+2z-3=0$.

Решение

В качестве нормального вектора $\boldsymbol{n}$ искомой плоскости можно взять вектор, перпендикулярный вектору $\overrightarrow{AB}=(1;3;-5)$ и нормальному вектору $\boldsymbol{n}_1=(1;1;2)$ данной плоскости. Поэтому, за $\boldsymbol{n}$ примем векторное произведение $\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{n}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}\,.$$

Теперь воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку, например $A(2;-1;4)$, перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = 11\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$:
$11(x-2) - 7(y+1) - 2(z-4) = 0$ или $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

Ответ: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

Задание 18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;-5)$ и перпендикулярной плоскостям $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ и $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

Решение

В качестве нормального вектора $\boldsymbol{n}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение нормальных векторов $\boldsymbol{n}_1 = (3;-2;2)$ и $\boldsymbol{n}_2 = (5;-4;3)$ данных плоскостей:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}\,.$$

Теперь воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M(3;-1;-5)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$:
$2(x-3) + (y+1) - 2(z+5) = 0$ или $2x + y - 2z - 15 = 0$.

Ответ: $2x + y - 2z - 15 = 0$.

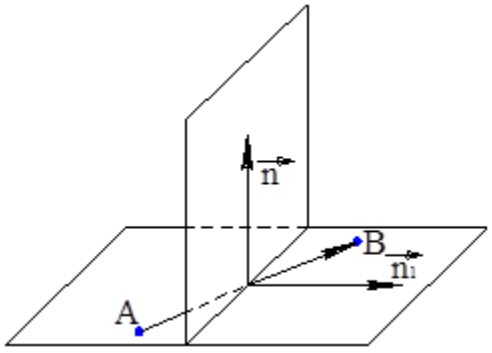


Рис. 9.8

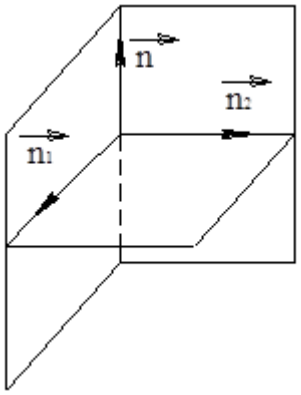


Рис. 9.9

Задание 19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;-1;3)$ и $M_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a} = (3;-1;4)$.

Решение

Отложим вектор $\boldsymbol{a}$ от точки M_1 (рис. 9.10).

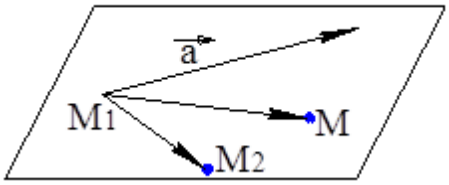


Рис. 9.10

Пусть $M(x;y;z)$ - произвольная точка плоскости. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-2;y+1;z-3)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;2;-1)$. Векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\boldsymbol{a}$ лежат в одной плоскости, поэтому их смешанное произведение $\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{a}=0$ или

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Разлагая последний определитель по элементам первой строки, получим

$(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}-(y+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+(z-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=0$, или $x-y-z=0$.

Замечание. Задачу можно было решить другим способом, а именно: найти нормальный вектор искомой плоскости как векторное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\boldsymbol{a}$, а затем воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через точку плоскости и ее нормальный вектор.

Ответ*:* $x-y-z=0$.

Задание 20. Составить уравнения плоскостей по следующим данным:

1) плоскость перпендикулярна оси Oz и проходит через точку $M(-3;1;-2)$;
2) плоскость проходит через ось Oy и точку $Q(4;2;-5)$;
3) плоскость параллельна оси Ox и проходит через две точки $R(1;1;2)$ и $S(5;3;-2)$.

Решение

1) Плоскость, перпендикулярная оси Oz, параллельна координатной плоскости xOy и ее уравнение имеет вид $Cz+D=0$.Подставляя в это уравнение координаты точки $M(-3;1;-2)$, получим $C\cdot(-2)+D=0$, откуда $D=2C$. Следовательно, $Cz+2C=0$, $C\cdot(z+2)=0$, но $C\neq0$, значит, получим уравнение $z+2=0$ или $z=-2$.

2) Так как плоскость проходит через ось Oy, то ее уравнение ищем в таком виде: $Ax+Cz=0$.Подставляя в это уравнение координаты точки Q, получим $A\cdot4+C\cdot(-5)=0$, откуда $A=\frac{5}{4}C$. Таким образом, плоскость имеет уравнение $\frac{5}{4}Cx+Cz=0$ или $C\cdot\left(\frac{5}{4}x+z\right)=0$, но $C\neq0$, значит $5x+4z=0$.

3) Поскольку плоскость параллельна оси Ox, то ее уравнение не содержит члена с x, т.е. имеет вид $By+Cz+D=0$.Так как плоскость проходит через две точки R и S, то их координаты удовлетворяют уравнению. Подставляя координаты этих точек в данное уравнение, получим $B+2C+D=0$; $3B-2C+D=0$,откуда $B=-\frac{D}{2}$, $C=-\frac{D}{4}$. Следовательно, уравнение

принимает вид $-\frac{D}{2}y-\frac{D}{4}z+D=0$ или $2y+z-4=0$.

Ответ: 1) $z=-2$; 2) $5x+4z=0$; 3) $2y+z-4=0$.

ДКР

Вариант 1

1. Дан тетраэдр с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;-3;5)$, $C(6;2;5)$, $D(3;-2;-5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.
2. Даны точки $M_1(0;-1;3)$ и $M_2(1;3;5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Ответ: 1. $d=4$; 2. $x+4y-2z-2=0$.

Вариант 2

1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2;-1;1)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x-z+1=0$, $y=0$.
2. Уравнение плоскости $x-2y+2z-8=0$ привести к нормальному виду.

Ответ 1. $x+2z-4=0$; 2. $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{8}{3}=0$.

Домашнее задание

1. Прямая в пространстве.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: №№ 913, 917, 921, 926(2,3), 927(2,3), 928(2,3), 929, 931, 934, 940(11.2), 941(1), 944, 956, 957(1,6), 958(1), 960.

ПЗ №10. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнения поверхностей второго порядка.

1. Определение типа поверхности по каноническому виду уравнений второго порядка.
2. Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду.
3. Уравнения пересечения поверхностей второго порядка с плоскостями.

ПЗ №11. Итоговое занятие по разделу 2.

Выполнение заданий коллоквиума в форме контролирующего теста №1 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»: вычисление определителей, умножение матриц, вычисление обратной матрицы, решение систем линейных уравнений, вычисление скалярного, векторного и смешанного произведений векторов, разложение вектора по базису, поиск уравнений прямой и плоскости, решение задач на взаимное расположение прямой и плоскости, приведение к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка.

ПЗ №12. Основные виды отображений и их пределы.

Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty]$.

ПЗ №13. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы.

Вычисление пределов с помощью эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших величин.

ПЗ №14. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы.

Применение первого и второго замечательного пределов при решении задач.

ПЗ №15. Непрерывность функции (с разработкой занятия).

Нахождение точек разрыва функции одной переменной.

Теоретические сведения

Непрерывность числовой функции одной переменной

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке *a*, если выполняется равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Чтобы выполнялось это равенство, в точке*a* должны выполнятся следующие условия:

1) функция $f(x)$ определена в точке *a*;

2) существуют конечные односторонние пределы функции при $x \to 0$, т.е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$;

3) односторонние пределы равны между собой и равны значению функции $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$.

Если не выполняется хотя бы одно из условий, то функция не будет в точке*a* непрерывной.

Свойства непрерывных функций

1) Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций, есть функция непрерывная.

2) Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых делитель не равен нулю.

3) Если $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ непрерывные функции своих аргументов, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ также непрерывна.

Точки разрыва и их классификация

Определение. Точка *a*, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области называется ***точкой разрыва***, если в этой точке нарушается условие непрерывности.

Существует два рода точек разрыва.

Точки разрыва первого рода

Если $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$ ($\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$), то a - точка устранимого разрыва.

Если $f(a-0) \neq f(a+0)$, то *a* - точка конечного скачка, где $f(a-0) - f(a+0)$ скачок функции в точке *a*.

Точки разрыва второго рода

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то в точке *a* - бесконечный скачок.

Если не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Напомним области определений некоторых функций.

1. Функции $y=x^n$ $y=\operatorname{arctg} x,$ $y=\operatorname{arcctg} x$ непрерывны в $(-\infty,+\infty)$.
2. Функция $y=\sqrt[2n]{x}$, $y=\sqrt[2n-1]{x}$, $y=a^x\ (a>0)$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ непрерывнына $[0,+\infty)$.
3. Функция $y=\log_a x(a>0)$ непрерывна на $(0,+\infty)$.
4. Функции $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ непрерывны на $[-1,+1]$.
5. Функция $y=\operatorname{tg} x$ непрерывна в $(-\infty,+\infty)$, кроме точек вида $x=(2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}$, где $k\in Z$.
6. Функция $y=\operatorname{ctg} x$ непрерывна в $(-\infty,+\infty)$, за исключением точек вида $x=k\pi$, где $k\in Z$.
7. Целая рациональная функция непрерывна в $(-\infty,+\infty)$.
8. Дробно-рациональная функция непрерывна в $(-\infty,+\infty)$, кроме точек, в которых ее знаменатель равен нулю.

Практические задания

Задание 1. Показать, что при $x=5$ функция $y=\dfrac{x}{x-5}$ имеет разрыв.

Решение

Дана дробно-рациональная функция, которая непрерывна на множестве действительных чисел, кроме корней знаменателя. Следовательно, данная функция непрерывна на следующих интервалах: $(-\infty,5),(5,+\infty)$.

Точка $x=5$-точка разрыва, в этой точке функция неопределена. Рассмотрим односторонние пределы функции в точке $x=5$:

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{x}{x-5}=\left\{\frac{5-0}{5-0-5}=\frac{5}{-0}\right\}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{x}{x-5}=\left\{\frac{5+0}{5+0-5}=\frac{5}{+0}\right\}=+\infty$$

Функция при $x\to 5$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела, следовательно, $x=5$ - точка разрыва второго рода с бесконечным скачком.

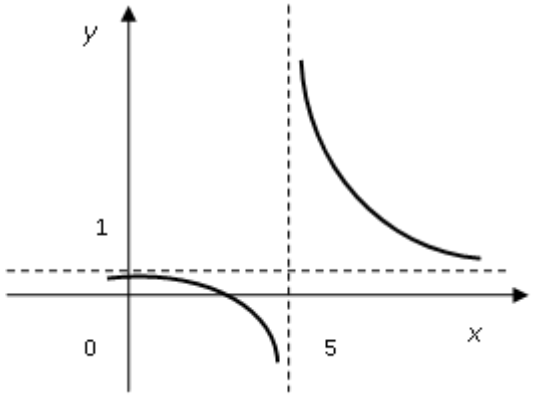


Рис. 15.1

Ответ: $x=5$ - точка разрыва второго рода с бесконечным скачком.

Задание 2. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Решение

Дана дробно-рациональная функция, которая непрерывна на множестве действительных чисел, кроме корней знаменателя. Следовательно, данная функция непрерывна на следующих интервалах: $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$.

Точки $x=-1, x=1$- точки разрыва, в этих точках функция не определена. Рассмотрим односторонние пределы функции в точке $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x^2-1}=\left\{\frac{-1-0}{(-1-0)^2-1}=\frac{-1}{-0}\right\}=+\infty;\ \lim_{x\to -1+0}\frac{1}{x^2-1}=\left\{\frac{-1+0}{(-1+0)^2-1}=\frac{-1}{+0}\right\}=-\infty.$$

Теперь вычислим односторонние пределы функции в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x^2-1}=\left\{\frac{1-0}{(1-0)^2-1}=\frac{1}{-0}\right\}=-\infty;\ \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x^2-1}=\left\{\frac{1+0}{(1+0)^2-1}=\frac{1}{+0}\right\}=+\infty.$$

В обеих точках функция не имеет ни левого, ни правого конечного предела, следовательно, $x=-1,\ x=1$ - точки разрыва второго рода с бесконечным скачком.

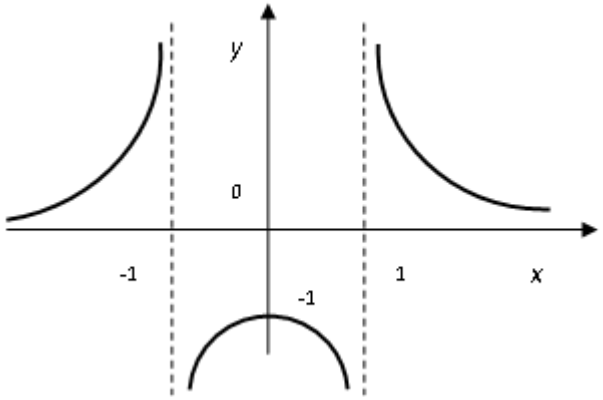


Рис. 15.2

Ответ: $x=-1,\ x=1$ - точки разрыва второго рода с бесконечным скачком.

Задание 3. Исследовать на непрерывность функцию $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$.

Решение

Дана сложная функция $y=\operatorname{arctg} z$, где $z=\dfrac{1}{x-3}$. Функция $y=\operatorname{arctg} z$ непрерывна на множестве действительных чисел, функция $z=\dfrac{1}{x-3}$ - дробно-рациональная, которая непрерывна на множестве действительных чисел, кроме корней знаменателя, т.е. на множестве $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$. Следовательно, данная сложная функция по свойству 3 непрерывна на множестве $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

Точка $x=3$ - точка разрыва. Исследуем характер разрыва :

$$\lim_{x\to 3-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-3}=\left\{\frac{1}{3-0-3}=\frac{1}{-0}=-\infty\right\}=\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 3+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-3}==\left\{\frac{1}{3+0-3}=\frac{1}{+0}=+\infty\right\}=\operatorname{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}.$$

Односторонние пределы в точке $x=3$ конечны, но различны: $-\frac{\pi}{2}\neq\frac{\pi}{2}$, и функция в точке $x=3$ не определена. Точка $x=3$ - точка разрыва первого рода.

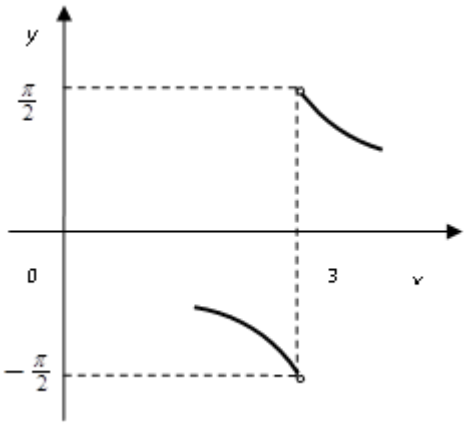


Рис. 15.3

Ответ: $x=3$ - точка разрыва первого рода с конечным скачком, равным.

Задание 4. Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases} x-1, & 0\le x<3; \\ 3-x, & 3\le x<4. \end{cases}$

Решение

Функция *y* задана на отрезке двумя аналитическими выражениями, «состыкованными» между собой в точке $x=3$. И хотя оба эти выражения непрерывны на числовой прямой (как целые рациональные), можем утверждать о непрерывности функции *y* без исследования точки «стыковки», лишь на объединении интервалов $[0,3)\cup(3,4]$

Рассмотрим односторонние пределы функции в точке $x=3$:

$\lim\limits_{x\to 3-0}(x-1)=\{3-0-1\}=2$; $\lim\limits_{x\to 3+0}(3-x)=\{3-3-0\}=0$.

Односторонние пределы в точке $x=3$ конечны, но не равны. Точка $x=3$ - точка разрыва первого рода с конечным скачком.

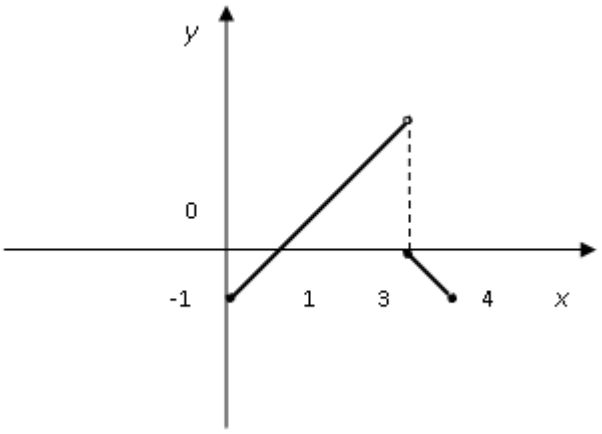


Рис. 15.4

Ответ: заданная функция непрерывна на $[0,3)\cup(3,4]$, а в точке $x=3$ терпит разрыв первого рода с конечным скачком.

Задание 5. Какого рода разрыв имеет функция $y=\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$?

Решение

Дано отношение двух функций, по свойству 2.Оно непрерывно там, где непрерывны и числитель, и знаменатель, причем знаменатель отличен от нуля.

Рассмотрим отдельно числитель и знаменатель. Числитель $f(x)=\sin x$ непрерывен в $(-\infty,+\infty)$. Знаменатель $f(x)=x$ непрерывен в $(-\infty,+\infty)$. Следовательно, частное непрерывно там, где знаменатель отличен от нуля, т.е. на интервале $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Точка $x=0$ - точка разрыва.

Определим тип точки разрыва.

$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\ \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1;\ y(0)=\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin 0}{0}$ -не существует.

Односторонние пределы между собой равны, но не равны значению функции в точке $x=0$. В точке $x=0$ функция терпит разрыв первого рода (устранимый). Фактически разрыв функции $y=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ ничем устранить нельзя, так как он существует в действительности. Можно только условно принять, что значение в этой точке равно 1. Такое соглашение восстановит на кривой отсутствующую, на ней точку (0,1).

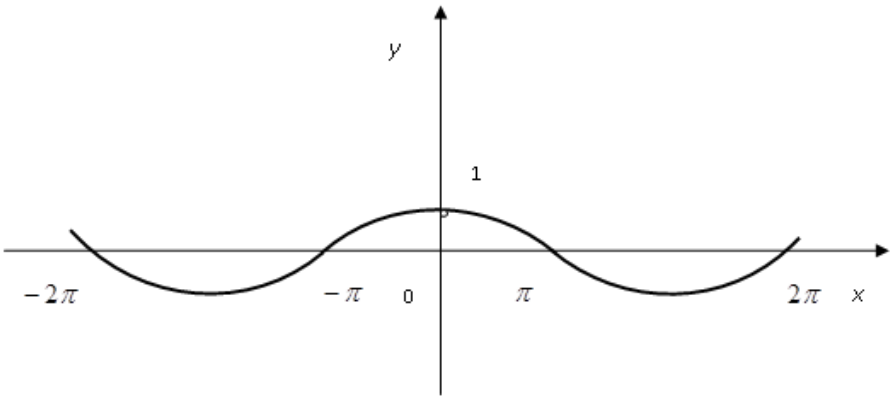


Рис. 15.5

Ответ: заданная функция непрерывна на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, а в точке $x=0$ имеет устранимый разрыв.

Задание 6. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<-2;\\ \dfrac{\sin x}{x}, & -2\le x<\pi;\\ x-\pi, & x>\pi.\end{cases}$$

Решение

Функция *y* задана на $(-\infty,+\infty)$ тремя аналитическими выражениями, «состыкованными» в точках $x=-2$, $x=\pi$. В интервале $(-\infty,-2)$ она определена выражением $\dfrac{1}{x}$, которое в этом интервале непрерывно ($\dfrac{1}{x}$ имеет разрыв в точке $x=0$, которая не входит в интервал. В интервале $(-2,\pi)$ она определена выражением $\dfrac{\sin x}{x}$, которое в этом интервале непрерывно, за исключением точки $x=0$. Следовательно, $x=0$ - точка разрыва. В интервале $(\pi,+\infty)$ она определена выражением $x-\pi$, которое в этом интервале непрерывно.

Исследуем непрерывность функции в точках $x=-2$, $x=0$, $x=\pi$.

В точке $x=-2$: $\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{\sin x}{x}=\left\{\dfrac{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{-2}=\dfrac{-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)}{-2}=\dfrac{-\sin\frac{\pi}{3}}{-2}\right\}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Односторонние пределы конечны, но не равны между собой. В точке $x=-2$ функция имеет разрыв первого рода с конечным скачком.

В точке $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. $y(0)=\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin 0}{0}$ - не существует.

Односторонние пределы между собой равны, но не равны значению функции в точке $x=0$. В точке $x=0$ функция терпит устранимый разрыв первого рода.

В точке $x=\pi$: $\lim\limits_{x\to \pi-0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin(\pi-0)}{\pi-0}=\dfrac{\sin 0}{\pi}=0$; $\lim\limits_{x\to \pi+0}(x-\pi)=\pi+0-\pi=0$;

$y(\pi)=\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=0$.

Все три числа равны между собой. Следовательно, в точке $x=\pi$ функция непрерывна.

Ответ: в точке $x=-2$ функция имеет разрыв первого рода с конечным скачком. В точке $x=0$ функция терпит устранимый разрыв первого рода.

В точке $x=\pi$ функция непрерывна.

Задание 7. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{2}x, & -\infty<x<-1;\\ 2, & x=1;\\ x-1, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Решение

Функция *y* задана на $(-\infty,+\infty)$ двумя аналитическими выражениями, В интервале $(-\infty,-1)$ она определена выражением $\cos\frac{\pi}{2}x$, которое в этом интервале непрерывно ($\cos\alpha x$ непрерывна на числовой прямой при любом α по свойству 3) На интервале $(1,+\infty)$ она определена линейным выражением $x-1$, которое в этом интервале непрерывно при любых *x* , и в частности в $(1,+\infty)$.

Осталась не исследованной точка $x=1$. В этой точке функция определена, причем $y(1)=2$. Вычислим односторонние пределы:

$\lim\limits_{x\to 1-0}\cos\dfrac{\pi}{2}x=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$; $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=1+0-1=0$.

Односторонние пределы между собой равны, но не равны значению функции. Тогда $x=1$ - точка устранимого разрыва.

Ответ: заданная функция непрерывна на $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, а в точке $x=1$ имеет устранимый разрыв.

Задание 8. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{\cos x}{x}$.

Решение

Дано отношение двух функций, по свойству 2 оно непрерывно там, где непрерывны и числитель, и знаменатель, причем знаменатель отличен от нуля.

Рассмотрим отдельно числитель и знаменатель. Числитель $f(x)=\cos x$ непрерывен в $(-\infty,+\infty)$. Знаменатель $f(x)=x$ непрерывен в $(-\infty,+\infty)$. Следовательно, частное непрерывно там, где знаменатель отличен от нуля, т.е. на интервале $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Точка $x=0$ - точка разрыва.

Определим тип точки разрыва:

$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\cos x}{x}=\left\{\dfrac{1}{-0}\right\}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\cos x}{x}=\left\{\dfrac{1}{+0}\right\}=+\infty$.

Функция в точке $x=0$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела, следовательно, $x=0$ - точка разрыва второго рода с бесконечным скачком.

Ответ: $x=0$ - точка разрыва второго рода с бесконечным скачком.

Задание 9. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\begin{cases} x^2,\ -\infty<x<1; \\ 2x-1,\ 1\le x<+\infty. \end{cases}$$

Решение

Функция *y* задана на отрезке двумя аналитическими выражениями, «состыкованными» между собой в точке $x=1$. Оба эти выражения непрерывны на числовой прямой (как целые рациональные). Осталась не -исследованной точка $x=1$.

Рассмотрим односторонние пределы функции в точке $x=1$:

$\lim\limits_{x\to 1-0}x^2=\left\{(1-0)^2\right\}=1$; $\lim\limits_{x\to 1+0}(2x-1)=1$; $y(1)=2x-1=1$.

Все три найденных числа совпадают между собой. Следовательно, в точке $x=1$ функция непрерывна.

Ответ: в точке $x=1$ функция непрерывна.

Задание 10. Исследовать на непрерывность функцию $y=2^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение

Дана сложная функция $y=2^z$, где $z=\dfrac{1}{x-1}$. Функция $y=2^z$, непрерывна на множестве действительных чисел $2>0$, функция $z=\dfrac{1}{x-1}$ - дробно-рациональная, которая непрерывна на множестве действительных чисел, кроме корней знаменателя, т.е. на множестве $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Следовательно, данная сложная функция по свойству 3 непрерывна на множестве $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Точка $x=1$ - точка разрыва.

Определим тип точки разрыва:

$$\lim_{x\to 1-0}2^{\frac{1}{x-1}}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{1-0-1}=\dfrac{1}{-0}=-\infty, \\ \lim\limits_{x\to 1-0}2=2>0\end{array}\right\}=0;$$

$$\lim_{x\to 1+0}2^{\frac{1}{x-1}}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{1+0-1}=\dfrac{1}{+0}=+\infty, \\ \lim\limits_{x\to 1+0}2=2>0\end{array}\right\}=+\infty.$$

Итак, $x=1$ - точка разрыва второго рода с бесконечным скачком, так как правосторонний предел равен ∞.

Ответ: $x=1$ - точка разрыва второго рода с бесконечным скачком.

ДКР

Вариант 1

Исследовать на непрерывность функцию. Найти точки разрыва и указать их характер.

1. $y=\begin{cases} x^2+1, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{x}, & -0<x\le 3; \\ 2, & x>3. \end{cases}$ 2. $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x+3}, & x<-1; \\ \dfrac{5x^2-x}{x}, & -1\le x\le \pi; \\ 4, & x>1. \end{cases}$

Вариант 2

Исследовать на непрерывность функцию. Найти точки разрыва и указать их характер.

1. $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x<0; \\ x^2-1, & x\ge 0. \end{cases}$ 2. $y=\begin{cases} -2, & x\le -1; \\ 2x, & -1<x\le 2; \\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2. \end{cases}$

Домашнее задание

1. Производные.
2. *Берман. Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. №№ 221, 228, 233, 235, 237.

ПЗ №16. Дифференциал и производная (с разработкой занятия).

1. Вычисление производных сложных функций одной переменной. Вычисление значения производной в заданной точке.
2. Дифференцирование обратных функций и функций, заданных неявно или параметрически.
3. Логарифмическое дифференцирование.
4. Вычисление дифференциала функции одной переменной.

Вычисление производных сложных функций одной переменной. Вычисление значения производной в заданной точке.

Теоретические сведения

Производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$ в данной точке x определяется равенством $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Если этот предел конечный, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x ; при этом она обязательно непрерывна в этой точке.

Геометрически величина производной $f'(x)$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x

Основные правила дифференцирования:

1) $C'=0$;
2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;
3) $(Cu)'=Cu'$;

4) $\left(uv\right)' = u'v + uv'$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ($v \neq 0$).

Здесь $C = \text{const}$, а u и v - функции от x, имеющие производные в соответствующей точке.

Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $y'_x(x_0) = y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0)$.

Дифференцирование основных элементарных функций

$u = u(x)$

$C' = 0$

$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \quad a > 0, a \neq 1$

$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$

$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$

$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

$\left(\text{tg}\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

$\left(\text{ctg}\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

$\left(\arcsin u\right)' = -\left(\arccos u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u', \quad |u| < 1$

$\left(\text{arc tg}\, u\right)' = -\left(\text{arc ctg}\, u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Практические задания

Задание 1. Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций (при решении делаются ссылки на правила и формулы):

1) $y = 8 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 10$;

2) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$;

3) $y = x^3 \cdot e^x$;

4) $y = x\sqrt{x}\left(4 \ln 5x - 6\right)$;

5) $y = \frac{1}{x^3 + x^2 + 4}$;

6) $y = \frac{\arcsin x}{x}$;

7) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$;

8) $y = (5 \cdot x^3 + x^2 - 4)^5$;

9) $y = \sqrt{(x^2 + x + 2)^3}$;

10) $y = 5^{\sin^2 x}$;

11) $y = e^{\arccos x^3}$;

12) $y = \log_5\left(3x^4 - 1\right)$;

13) $y = \sin\frac{1}{x}$;

14) $y = \cos^3 4x$;

15) $y = \sqrt{\text{tg}\frac{x^2}{3}}$;

16) $y = \text{ctg}\sqrt[3]{1 + x^3}$;

17) $y = \arcsin\frac{1}{x^2}$;

18) $y = \text{arctg}^3 2x$;

19) $y = \ln \text{arcctg}\sqrt{x}$.

Решение

1) $y' = (8 \cdot x^3)' - (10 \cdot x^2)' + (12 \cdot x)' + (10)' = 24 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 12$;

2) перепишем в рациональном виде: $y = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{6}}$, найдем производную $y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' + \left(x^{\frac{1}{6}}\right)' = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\cdot x^{-\frac{5}{6}}$;

3) $y' = x^3\left(e^x\right)' + (x^3)'\cdot e^x = x^3e^x + 3x^2e^x = x^2e^x\left(x+3\right)$;

4) перепишем заданную функцию в рациональном виде: $y = x^{\frac{3}{2}}\left(4\ln 5x - 6\right)$, Тогда $y' = x^{\frac{3}{2}}\left(4\ln 5x-6\right)' + \left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\left(4\ln 5x-6\right) = x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4}{x} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\left(4\ln 5x-6\right) = x^{\frac{1}{2}}\left(6\ln 5x-5\right)$;

5) $y' = -\frac{(x^3+x^2+4)'}{(x^3+x^2+4)^2} = -\frac{3\cdot x^2+2\cdot x}{(x^3+x^2+4)^2}$;

6) $y' = \frac{x\cdot\left(\arcsin x\right)' - \arcsin x\cdot\left(x\right)'}{x^2} = \frac{x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$;

7) $y' = \frac{\left(\sin x-\cos x\right)'\cdot\left(\sin x+\cos x\right) - \left(\sin x+\cos x\right)'\cdot\left(\sin x-\cos x\right)}{\left(\sin x+\cos x\right)^2} =$

$= \frac{\left(\sin x+\cos x\right)^2 + \left(\cos x-\sin x\right)^2}{\left(\sin x+\cos x\right)^2} = \frac{2}{\left(\sin x+\cos x\right)^2}$;

8) $y' = 5\cdot(5\cdot x^3+x^2-4)^4\cdot(5\cdot x^3+x^2-4)' = 5\cdot(15\cdot x^2+2\cdot x)\cdot(5\cdot x^3+x^2-4)^4$;

9) $y' = \frac{3}{2}\cdot(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(x^2+x+2)' = \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+2}$;

10) $y' = 5^{\sin^2 x}\cdot\ln 5\cdot\left(\sin^2 x\right)' = 5^{\sin^2 x}\cdot\ln 5\cdot 2\sin x\cdot\cos x = 5^{\sin x^2}\cdot\sin 2x\cdot\ln 5$;

11) $y' = e^{\arccos x^3}\cdot\left(\arccos x^3\right)' = -e^{\arccos x^3}\cdot\frac{\left(x^3\right)'}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} \overset{[\phi 2]}{=} -e^{\arccos x^3}\cdot\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$;

12) $y' = \frac{1}{\left(3x^4-1\right)\cdot\ln 5}\cdot\left(3x^4-1\right)' = \frac{12x^3}{\left(3x^4-1\right)\cdot\ln 5}$;

13) $y' = \cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right)$;

14) $y' = 3\cdot\cos^2 4x\cdot(\cos 4x)' = 3\cos^2 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot(4x)' = 12\cos^2 4x\cdot(-\sin 4x) =$

$= -12\sin 4x\cdot\cos^2 4x$;

15) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x^2}{3}}}\left(\operatorname{tg}\frac{x^2}{3}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x^2}{3}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x^2}{3}}\cdot\left(\frac{x^2}{3}\right)' = \frac{1}{2}\frac{\frac{2x}{3}}{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x^2}{3}\cdot\cos^2\frac{x^2}{3}}} =$

$= \frac{x}{3\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x^2}{3}\cdot\cos^2\frac{x^2}{3}}}$;

16) $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt[3]{1+x^3}} \cdot (\sqrt[3]{1+x^3})' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt[3]{1+x^3}} \cdot \frac{\left(1+x^3\right)'}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}} = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt[3]{1+x^3}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$;

17) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right) = -\frac{2}{x \cdot \sqrt{x^4-1}}$;

18) $y' = 3\operatorname{arctg}^2 2x \cdot (\operatorname{arctg} 2x)' = 3\operatorname{arctg}^2 2x \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = 6 \cdot \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1+4x^2}$;

19) $y' = \frac{1}{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}} \cdot \left(\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}} \cdot (-\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x}\right)') = -\frac{1}{2\operatorname{arcctg}\sqrt{x} \cdot (1+x) \cdot \sqrt{x}}$.

Задание 2. Найти производные функции и вычислить их частные значения в указанных точках:

1) $y = \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x}$, $x = 0,01$;

2) $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$, $x = \frac{\pi}{6}$;

3) $y = \frac{a+b}{3-2x} + \frac{5x^4-1}{a-b}$, $x = 0$;

4) $y = \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{10}$, $x = -1$;

5) $y = \sin^3 2x - \cos^3 2x$, $x = \frac{\pi}{8}$;

6) $y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}$, $x = 0$;

7) $y = \operatorname{arctg}\frac{m}{x} - \operatorname{arcctg}(m \operatorname{ctg} x)$, $y'(0)$, $y'(\pi)$.

Решение

1) сначала раскрываем скобки и производим деление, затем дифференцируем $y = \frac{1-2\sqrt{x}+x}{x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 = x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 1$, $y' = -x^{-2} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, подставляя значение $x = 0,01$, получаем $y'(0,01) = -\frac{1}{0,01^2} + \frac{1}{\sqrt{0,01^3}} = -100^2 + 10^3 = -9000$;

2) найдем $y' = \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} = \frac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} =$

$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$, полагая, что $x = \frac{\pi}{6}$, получим $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{1-0,5} = 2$;

3) $y' = -\frac{(a+b)(3-2x)'}{(3-2x)^2} + \frac{\left(5x^4-1\right)'}{a-b} = \frac{2(a+b)}{(3-2x)^2} + \frac{20x^3}{a-b}$, при $x = 0$ найдем $y'(0) = \frac{2}{9}(a+b)$;

4) $y'=10\left(\frac{x}{2x+1}\right)^9\left(\frac{x}{2x+1}\right)'=10\left(\frac{x}{2x+1}\right)^9\frac{1\cdot(2x+1)-2x}{(2x+1)^2}=\frac{10x^9}{(2x+1)^{11}}$, при $x=-1$ получим $y'(-1)=10$;

5) $y'=3(\sin 2x)^2(\sin 2x)'-3(\cos 2x)^2(\cos 2x)'=$

$3\sin^2 2x\cdot 2\cos 2x-3\cos 2x(-2\sin 2x)=3\sin 4x(\sin 2x+\cos 2x)$, при $x=\frac{\pi}{8}$ найдем $y'\left(\frac{\pi}{8}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$;

6) На основании свойств логарифмов преобразуем данную функцию к более удобному виду:

$y=\frac{1}{2}\ln\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}=\frac{1}{2}\left(\ln e^{3x}-\ln\left(1+e^{3x}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(3x-\ln\left(1+e^{3x}\right)\right)$,

$y'=\frac{1}{2}\left((3x)'-\left(\ln\left(1+e^{3x}\right)\right)'\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{\left(1+e^{3x}\right)'}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{3}{2\left(1+e^{3x}\right)}$;

7) $y'=\frac{\left(\frac{m}{x}\right)'}{1+\frac{m^2}{x^2}}-\left(-\frac{(m\operatorname{ctg}x)'}{1+m^2\operatorname{ctg}^2 x}\right)=\frac{\frac{-m}{x^2}}{\frac{x^2+m^2}{x^2}}-\frac{m\operatorname{cosec}^2 x}{1+m^2\operatorname{ctg}^2 x}=\ =-\frac{m}{x^2+m^2}+\frac{m}{\sin^2 x+m\cos^2 x}$,

подставляя вместо x заданные значения 0 и π, найдем $y'(0)=-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=0$, $y'(\pi)=-\frac{m}{\pi^2+m^2}+\frac{1}{m}=\frac{\pi^2}{m(\pi^2+m^2)}$.

Дифференцирование обратных функций и функций, заданных неявно или параметрически.

Теоретические сведения

Производная обратной функции. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$, $a<x<b$, имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x=g(y)$ и $y'_x\neq 0$, то x'_y также существует и $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

Производная неявной функции. Если дифференцируемая функция $y=y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x,y)=0$, то надо продифференцировать его по x, рассматривая y как функцию от x, и решить полученное уравнение $\frac{d}{dx}F(x,y)=0$ относительно y'_x.

Производная функции, заданной параметрически. Если система уравнений $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $t\in(\alpha;\beta)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции и $\varphi'(t)\neq 0$, определяет y как однозначную непрерывную функцию от x, то производная y'_x существует и $y'_x=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}$, или $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$.

Практические задания

Задание 3. Найти x'_y для функции $y = 2x^3 + 3x^5 + x$.

Решение

Имеем $y' = 6x^2 + 15x^4 + 1$. Следовательно, $x'_y = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{1}{6x^2 + 15x^4 + 1}$.

Задание 4. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную y'_x для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение

Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно, $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{3y^2} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Задание 5. Найти производные y'_x от функций, заданных неявно:

1) $x^3 + x^2 y + y^2 = a$; 2) $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$.

Решение

1) Дифференцируем по x, считая y функцией от x, получим: $3x^2 + 2xy + x^2 y' + 2yy' = 0$. Решая это уравнение относительно y', найдём $y' = -\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}$.

2) Дифференцируем по x, считая y функцией от x, получим: $\dfrac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0$, откуда $y' = \dfrac{1+y^2}{y^2} = y^{-2} + 1$

Задание 6. Функция задана переметрически $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(t+1) \end{cases}$. Найти $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$.

Решение

Находим производные от x и от по параметру t: $\dfrac{dx}{dt} = 2t + 2$; $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t+1}$ и искомую производную от y по x: $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{1}{t+1}}{2t+2} = \dfrac{1}{2(t+1)^2}$.

Задание 7. Для функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt \\ y = k\cos t + \cos kt \end{cases}$, найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}$. Каков геометрический смысл результата?

Решение

Найдем производные от x и от y по параметру t: $\frac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt$ $\frac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt$. Искомая производная от x и от y по параметру t

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{k\left(\sin t + \sin kt\right)}{k\left(\cos t + \cos kt\right)} = -\frac{2\sin\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}{2\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{k+1}{2}t.$ При $t = 0$ получим $\frac{dy}{dx} = 0$.

Согласно геометрическому значению производной в точке $\left(0; k+1\right)$, где $t = 0$, касательная к графику параллельна оси Ox.

Логарифмическое дифференцирование.

Практические задания

Задание 8. Продифференцировать данные функции, используя метод логарифмического дифференцирования.

1) $y = x^x$;

2) $y = \left(\sin x\right)^{\cos x}$;

3) $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;

4) $y = \frac{\left(2x-1\right)^3\sqrt{3x+2}}{\left(5x+4\right)^2\sqrt[3]{1-x}}$;

5) $y = x^{x^x}$.

Решение

1) Здесь основание и показатель степени зависят от x, Логарифмируя, получим $\ln y = x\ln x$. Продифференцируем обе части последнего равенства по x. Так как y является функцией от x, то $\ln x$ есть сложная функция x и $\left(\ln x\right)' = \frac{y'}{y}$. Следовательно, $\frac{y'}{y} = x'\ln x + x\left(\ln x\right)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x}$;

$y' = y\left(1+\ln y\right) = x^x\left(1+\ln x\right)$;

2) $\ln y = \ln\left(\sin\right)^{\cos x} = \cos x\ln\left(\sin x\right)$;

$\frac{y'}{y} = \left(\cos x\right)'\ln\left(\sin x\right) + \left(\ln\left(\sin x\right)\right)'\cos x = \left(-\sin x\right)\cdot\ln\left(\sin x\right) + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x$;

$y' = y\cdot\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\ln\left(\sin x\right)\right) = \left(\sin x\right)^{\cos x-1}\cdot\left(\cos^2 x - \sin^2 x\ln\left(\sin x\right)\right)$;

3) $\ln y = \ln\left(\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x\cdot\sin x\cdot\sqrt{1-e^x}\right) = = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln\sin x + \frac{1}{2}\ln\sqrt{1-e^x}$;

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2\sin x}\left(\sin x\right)' + \frac{1}{4}\frac{1}{1-e^x}\left(1-e^x\right)' = \frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{2} - \frac{e^x}{4\left(1-e^x\right)}$;

4) $\ln y = \ln\left(2x-3\right)^3 + \ln\sqrt{3x+2} - \ln\left(5x+4\right)^2 - \ln\sqrt[3]{1-x}$;

$$(\ln y)' = \left(3\ln(2x-3)+\frac{1}{2}\ln(3x+2)-2\ln(5x+4)-\frac{1}{3}\ln(1-x)\right)';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{2x-3}+\frac{3}{2(3x+2)}-\frac{10}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)};\ y' = y\left(\frac{6}{2x-3}+\frac{3}{2(3x+2)}-\frac{10}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

5) $\ln y = \ln x^{x^x} = x^x \ln x$; $(\ln y)' = \left(x^x \ln x\right)'$;

$$\frac{y'}{y} = \left(x^x\right)'\ln x + (\ln x)' x^x = x^x(\ln x+1)\ln x + \frac{1}{x}x^x;\qquad y' = yx^x\left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right);$$

$$y' = x^{x^x}x^x\left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right).$$

Вычисление дифференциала функции одной переменной.

Если приращение Δy у функции $y = f(x)$ может быть представлено так: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(x,\Delta x)\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x,\Delta x) = 0$, то такая функция называется дифференцируемой в точке x. Главная линейная часть этого приращения $A(x)\Delta x$ называется *дифференциалом* функции и обозначается $df(x)$ или dy. По определению, $dx = \Delta x$.

Для существования дифференциала функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y' = A(x)$. Дифференциал функции можно записать следующим образом: $dy = y'(x)dx = f'(x)dx$.

Для сложной функции $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ форма дифференциала сохраняется в виде $dy = f'(u)du$ (инвариантность формы дифференциала).

Если Δx достаточно мало по абсолютной величине, то с точностью до малых более высокого порядка, чем Δx, имеет место приближенная формула $\Delta y \approx dy$.

Практические задания

Задание 9. Найти дифференциалы функций одной переменной:

1) $y = 2x\cdot\operatorname{ctg}5x$;

2) $y = 3x^2 - \sin(1+2x)$;

3) $y = \ln\left(1+e^{10x}\right) + \sqrt{x^2+1}$;

4) $y = \operatorname{cth}\frac{1}{x}$;

5) $y = \frac{\operatorname{sh}^2 5x}{x}$.

Решение

1) Находим производную данной функции и, умножив ее на дифференциал независимой переменной, получим искомый дифференциал данной функции:

$$y' = (2x)'\cdot\operatorname{ctg}5x + 2x\left(\operatorname{ctg}5x\right)' = 2\operatorname{ctg}x + 2x\cdot\frac{-5}{\sin^2 5x},\ dy = y'dx = \left(2\operatorname{ctg}x - \frac{10x}{\sin^2 5x}\right)dx;$$

2) $y' = \left(3x^2\right)' - \left(\sin(1+2x)\right)' = 6x - 2\cos(1+2x)$, $dy = y'dx = \left(6x - 2\cos(1+2x)\right)dx$.

3) $y' = \dfrac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$; $dy = y'dx = \left(\dfrac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$;

4) $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 \dfrac{1}{x}} \left(\dfrac{1}{x} \right)' = \dfrac{1}{x^2 \cdot \operatorname{sh} \dfrac{1}{x}}$; $dy = y'dx = \dfrac{dx}{x^2 \operatorname{sh}^2 \dfrac{1}{x}}$;

5) $y' = \dfrac{2\operatorname{sh} 5x \cdot \operatorname{ch} 5x \cdot 5x - \operatorname{sh}^2 5x}{x^2}$; $dy = \left(\dfrac{5x \operatorname{sh} 10x - \operatorname{sh}^2 5x}{x^2} \right) dx$.

Задание 10. Для функции $y = \ln\left(1+e^{10x}\right) + \operatorname{arcctg} e^{5x}$ вычислить dy при $x = 0$ и $dx = 0{,}1$.

Решение

$$dy = \left[\frac{\left(1+e^{10x}\right)'}{1+e^{10x}} - \frac{\left(e^{5x}\right)'}{1+e^{10x}} \right] dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} - \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}} \right) dx = \frac{5e^{5x}\left(2e^{5x}-1\right)}{1+e^{10x}} dx .$$

Полагая $x = 0$ и $dx = 0{,}1$, получим $dy = 0{,}25$.

ДКР

Вариант 1

1. Найти производные следующих функций.
   a. $y = \left(7x^3 + 5x^2 - 3\right)^4$;
   b. $y = 7 \operatorname{tg} \dfrac{x}{7} + \cos^2 3x$;
   c. $y = e^{\arccos x^2}$;
   d. $y = \ln \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.
2. Для функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = t^3 + 3t^2 \\ y = \ln\left(t^2 + 4t\right) \end{cases}$, найти производные.
3. Продифференцировать функцию $y = x^{\sin x}$, используя правило логарифмического дифференцирования:

Вариант 2

1. Найти производные следующих функций:
   a. $y = \left(5x^3 - 3x^2 + 6\right)^3$;
   b. $y = 9 \operatorname{ctg} \dfrac{x}{7} + e^{\sin 2x}$;
   c. $y = \arcsin \sqrt{x^3}$;

d. $y = \ln \frac{1-x^3}{1+x^2}$.

2. Для функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = t^5 + 5t^2 \\ y = \ln\left(t^4 + 8t\right) \end{cases}$, найти производные.

3. Продифференцировать функцию $y = x^{\cos x}$, используя правило логарифмического дифференцирования.

Домашнее задание

1. Частные производные.
2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. №№ 667 – 716.

ПЗ №17. Частные производные и полные дифференциалы.

1. Частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал функции нескольких переменных.
2. Вычисление производных сложных функций одной и нескольких переменных.

ПЗ №18. Производные и дифференциалы высших порядков.

1. Вычисление производных неявных функций одной и нескольких переменных.
2. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков функции одной и нескольких переменных.

ПЗ №19. Формула Тейлора функции одной переменной. Правило Лопиталя.

1. Разложение функций по формуле Тейлора.
2. Вычисление пределов по правилу Лопиталя.

ПЗ №20. Формула Тейлора функции одной переменной. Исследование функции.

1. Исследование функций и построение графиков.
2. Поиск экстремумов, кривизны кривой, асимптот графика.

ПЗ №21. Локальные экстремумы функции нескольких переменных.

1. Вычисление локального экстремума функции нескольких переменных.
2. Вычисление условного экстремума функции нескольких переменных.
3. Метод множителей Лагранжа.

ПЗ №22. Глобальные экстремумы функции нескольких переменных.

Вычисление глобального экстремума функции нескольких переменных.

ПЗ №23. Производная по направлению, градиент. Градиентный метод поиска экстремума функции.

1. Вычисление производной по направлению.
2. Вычисление градиента функции.

ПЗ №24. Итоговое занятие по разделам 3, 4.

Выполнение заданий коллоквиума в форме контролирующего теста №2 «Пределы, производные»: вычисление пределов, определение характера точек разрыва функций. Вычисление производных и исследование функции с помощью дифференциального исчисления.

ПЗ №25. Первообразная и неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям.

1. Интегрирование элементарных функций с помощью таблиц.
2. Вычисление неопределённых интегралов с помощью замены переменной.
3. Интегрирование неопределённых интегралов по частям.

ПЗ №26. Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.

Вычисление неопределённых интегралов от выражений, содержащих квадратный трехчлен.

ПЗ №27. Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование рациональных дробей.

1. Разложение рациональных дробей на сумму простейших.
2. Вычисление неопределённых интегралов от рациональных дробей.

ПЗ №28. Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование иррациональных выражений.

Вычисление неопределённых интегралов от иррациональных выражений с помощью подстановок.

ПЗ №29. Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование тригонометрических функций.

Вычисление неопределённых интегралов от тригонометрических функций с использованием подстановок.

ПЗ №30. Определенный интеграл. Вычисление определенных интегралов. Несобственные интегралы.

1. Вычисление определенных интегралов с использованием методов интегрирования неопределённых интегралов. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Приложения определённых интегралов.
3. Вычисление и оценки несобственных интегралов.

ПЗ №31. Двойной интеграл.

1. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах.
2. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах.
3. Приложения двойных интегралов.

ПЗ №32. Тройной интеграл.

1. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах.
2. Вычисление тройных интегралов цилиндрических координатах.

3. Вычисление тройных интегралов сферических координатах.
4. Приложения тройных интегралов.

ПЗ №33. Криволинейные интегралы первого рода.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода.

ПЗ №34. Криволинейные интегралы второго рода.

1. Вычисление криволинейных интегралов второго рода.
2. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования.
3. Приложения криволинейных интегралов.

ПЗ №35. Итоговое занятие по разделу.

Выполнение заданий коллоквиума в форме контролирующего теста №3 «Интегрирование»: вычисление определённых и неопределённых интегралов, решение элементарных задач на геометрические и физические приложения интегрального исчисления.

ПЗ №36. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка(с разработкой занятия).

1. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделёнными переменными.
2. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
3. Интегрирование однородных дифференциальных уравнений.

Интегрирование дифференциальных уравнений с разделёнными переменными.

Теоретические сведения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x, y)$ и её производные.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае записывается в виде

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (36.1)$$

Уравнение связывает независимую переменную x, искомую функцию y и её производную y'. Если уравнение (36.1) можно разрешить относительно y', то его записывают в виде

$y' = f(x, y)$,

или в дифференциальной форме

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Условия, при которых $x = x_0$ функция $y = y_0$ называются *начальными условиями.* Начальные условия записываются в виде $y(x_0) = y_0$.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая двум условиям:

1) функция $y=\varphi(x,C)$ является решением дифференциального уравнения при каждом фиксированном значении*C*;

2) каково бы ни было начальное условие $y(x_0)=y_0$ можно найти такое значение постоянной $C=C_0$, при котором функция $\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y=\varphi(x,C_0)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при фиксированном значении постоянной $C=C_0$.

Если общее решение дифференциального уравнения найдено в неявном виде, т.е. в виде уравнения $\Phi(x,y,C_0)=0$, то такое решение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. *Частным интегралом* называется интеграл, полученный из общего интеграла при фиксированном значении $C=C_0$: $\Phi(x,y,C_0)=0$.

С геометрической точки зрения общее решение дифференциального уравнения $y=\varphi(x,C)$ - это семейство интегральных кривых на плоскости *Oxy;* частное решение $y=\varphi(x,C_0)$ - одна кривая из этого семейства, проходящая через точку (x_0,y_0).

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0)=y_0$ называется *задачей Коши.*

Рассмотрим методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделёнными переменными называется уравнение вида $P(x)\,dx+Q(y)\,dy=0$.

В данном уравнении одно слагаемое зависит только от x, а другое только от *y*. Интегрируя почленно обе части уравнения, получаем общий интеграл

$$\int P(x)\,dx+\int Q(y)\,dy=C$$

Задание 1. Решить уравнение $(x-1)\,dx+(y+2)\,dy=0$.

Решение

Данное уравнение является уравнением с разделёнными переменными. Интегрируем обе части данного уравнения

$\int(x-1)\,dx+\int(y+2)\,dy=C_1$; $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(y+2)^2}{2}=C_1$; $(x-1)^2+(y+2)^2=C$ - общий интеграл, $C=2C_1$.

Выразим y через x и*C*: $y+2=\pm\sqrt{C-(x-1)^2}$

Ответ: $y=-2\pm\sqrt{C-(x-1)^2}$.

Задание 2. Решить уравнение $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{x}$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию: $y(2)=5$.

Решение

Запишем данное уравнение в дифференциальной форме. Для этого представим y' следующим образом $y' = \frac{dy}{dx}$, тогда $y' = \frac{y}{x}$ и $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение с разделёнными переменными: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$. Интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$, $\ln|y| = \ln|Cx|$, $y = Cx$. Итак, $y = Cx$ – общее решение.

Решим задачу Коши для данного уравнения по заданным начальным условиям: $5 = 2C \Rightarrow C = 2,5$, тогда $y = 2,5x$ - частное решение.

Ответ: $y = 2,5x$.

Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными называются уравнения вида $P_1(x)Q_2(y)dx + P_2(x)Q_1(y)dy = 0$.

Коэффициенты перед dx и dy представляют собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от *x*, а другая - только от *y*. Данное уравнение сводится к уравнению с разделёнными переменными путём деления всего уравнения на $Q_2(y)P_2(x) \neq 0$, таким образом, выражение перед дифференциалами содержит только одну переменную $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = 0$

.

Интегрируем обе части уравнения $\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = C$ - получаем общий интеграл.

Замечание: Чтобы не потерять решения при делении на $Q_2(y)P_2(x)$, следует отдельно решить уравнения $Q_2(y) = 0$ и $P_2(x) = 0$ и установить те решения дифференциального уравнения, которые не могут быть получены из общего уравнения. Такие решения являются *особыми*. Геометрически особое решение представляет собой *огибающую*семейства интегральных кривых. Линия *L*называется *огибающей* семейства линий, если она в каждой своей точке касается той или иной линии семейства, причём в различных точках линии *L*её касаются различные линии данного семейства.

Задание 3. Решить дифференциальное уравнение $dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$. Найти особые решения.

Решение

Разделим переменные в уравнении: $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$. Интегрируем: $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx$, $\arcsin y = x + C$. Общее решение уравнения $y = \sin(x + C)$.

Найдём особые решения. Для этого решим уравнение $\sqrt{1-y^2} = 0$, получим $y = \pm 1$. Данное решение не может быть получено из общего ни при каких значениях*C*, значит, оно является особым.

Ответ: Общее решение - $y = \sin(x + C)$, особые решения: $y = \pm 1$.

Задание 4. Решить уравнение $(y^2x + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

Решение

Разделим переменные в уравнении: $x\left(y^2+1\right)dx+y\left(1-x^2\right)dy=0$, $\frac{ydy}{y^2+1}=\frac{xdx}{x^2-1}$. Интегрируем полученное дифференциальное уравнение при $\left(y^2+1\right)\left(x^2-1\right)\neq 0$: $\int\frac{ydy}{y^2+1}=\int\frac{xdx}{x^2-1}$, $\ln\sqrt{y^2+1}=\ln\sqrt{x^2-1}+\ln\sqrt{C}$, $\ln\sqrt{y^2+1}=\ln\sqrt{x^2-1}+\ln\sqrt{C}$. Общий интеграл равен $y^2+1=C\left(x^2-1\right)$.

Чтобы рассмотреть вопрос об особых решениях, надо решить уравнение $\left(y^2+1\right)\left(x^2-1\right)=0$. В действительное области решениями этого уравнения являются значения $x=\pm 1$. Очевидно, что эти решения могут получиться из общего интеграла при определённых значениях*C*, поэтому не являются особыми.

Ответ: $y^2+1=C\left(x^2-1\right)$.

Задание 5. Решить уравнение $y'=xy^2+2xy$.

Решение

Запишем уравнение в дифференциальной форме. Т.к: $y'=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}=xy^2+2xy$. Разделим переменные: $\frac{dy}{dx}=x\left(y^2+2y\right)$, $\frac{dy}{y^2+2y}=xdx$. Учитывая, что $\frac{1}{y^2+2y}=\frac{1}{\left(y+1\right)^2-1}$ и $\frac{d\left(y+1\right)}{\left(y+1\right)^2-1}=xdx$, возьмём интегралы от обеих частей: $\int\frac{d\left(y+1\right)}{\left(y+1\right)^2-1}=\int xdx$, $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+1-1}{y+1+1}\right|=\frac{x^2}{2}+\frac{C}{2}$, $\ln\left|\frac{y}{y+2}\right|=x^2+C$, $\frac{y}{y+2}=Ce^{x^2}$, $y=\frac{2Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}}$ - общее решение.

Теперь следует решить вопрос об особых решениях. Для этого рассмотрим уравнение $y^2+2y=0$. Его решениями являются значения $y=0$ и $y=-2$. Значение $y=0$ не является особым решением дифференциального уравнения, т.к. оно может быть получено при $C=0$. $y=-2$ ни при каком значении*C* не может быть получено из общего решения, следовательно оно может являться особым решением дифференциального уравнения.

Ответ: $y=\frac{2Ce^{x^2}}{1-Ce^{x^2}}$ - общее решение; $y=-2$ - особое решение.

Задание 6. Решить задачу Коши при заданных начальных условиях $y'\sin x=y\ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$.

Решение

Разделим переменные $y' = \frac{y\ln y}{\sin x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{\sin x}$, $\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}$. Проинтегрируем: $\int \frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$, $\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln|C|$, $\ln y = C\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $y = e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ - общее решение. Найдём значение*C*, подставив в общее решение начальное условие: $e = e^{C\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, $e = e^{C}$, $C = 1$. Решение задачи Коши имеет вид $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

Ответ: $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Интегрирование однородных дифференциальных уравнений.

Теоретические сведения

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией *n*-го порядка относительно переменных x и y, если при любом $t \in R$ справедливо равенство $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$.

Уравнение первого порядка $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется *однородным,* если коэффициенты $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного порядка.

Для решения однородного уравнения вводится замена $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$ $dy = xdu + udx$, где u - новая неизвестная функция.

С помощью такой подстановки однородное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

Задание 7. Решить уравнение $xdy - \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = 0$.

Решение

Здесь функции $P(x,y) = -\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ и $Q(x,y) = x$ однородные первого порядка: $P(tx,ty) = -\left(ty + \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2}\right) = -t\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) = t^1 \cdot P(x,y)$, $Q(tx,ty) = tx = t^1 \cdot Q(x,y)$, значит дифференциальное уравнение является однородным.

Введём замену $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = ux$, $y' = u'x + u$, $dy = xdu + udx$, где u - новая неизвестная функция. Уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными: $x(xdu + udx) - \left(ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2}\right)dx = 0$, $x^2du + uxdx - uxdx - x\sqrt{1+u^2}dx = 0$, $x^2du = x\sqrt{1+u^2}dx$, $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$. Взяв интегралы от обеих частей, получим общее решение: $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = \ln|xC|$, $u + \sqrt{1+u^2} = xC$.

Перейдя к старым переменным, получим общий интеграл: $\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=xC$, $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2C$.

Ответ: $y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2C$.

Задание 8. Решить уравнение $y^2+x^2y'=xyy'$.

Решение

$y^2+\left(x^2-xy\right)y'=0$; $y^2+\left(x^2-xy\right)\frac{dy}{dx}=0$; $y^2dx+\left(x^2-xy\right)dy=0$ - однородное уравнение, т.к. $P(x,y)=y^2$ и $Q(x,y)=x^2-xy$ - однородные функции 2-го порядка.

Введём замену $u=\frac{y}{x}$, тогда $y=ux$, $y'=u'x+u$, $dy=xdu+udx$, где u - новая неизвестная функция. Уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными: $x^2u^2dx+\left(x^2-x^2u\right)\left(xdu+udx\right)=0$, $\cancel{x^2u^2dx}+x^3du+x^2udx-x^3udu-\cancel{x^2u^2dx}=0$, $x^2udx-x^3\left(u-1\right)du=0$, $\frac{dx}{x}=\frac{(u-1)du}{u}$, $\frac{dx}{x}=\left(1-\frac{1}{u}\right)du$, $\int\frac{dx}{x}=\int\left(1-\frac{1}{u}\right)du$, $\ln|x|=u-\ln|u|-\ln|C|$, $\ln|Cxu|=u$, $\ln|Cxu|=u$. $\ln|Cy|=\frac{y}{x}$ - общий интеграл.

Ответ: $\ln|Cy|=\frac{y}{x}$.

Задание 9. Решить уравнение $y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

Решение

Поскольку уравнение однородное, то переходя к замене $u=\frac{y}{x}$, получим $dy=\left(e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)dx$; $xdu+udx=\left(e^u+u\right)dx$; $xdu+udx=e^udx+udx$; $xdu=e^udx$; $e^{-u}du=\frac{dx}{x}$. Полученное уравнение с разделёнными переменными легко интегрируется: $\int e^{-u}du=\int\frac{dx}{x}$; $-e^{-u}=\ln|Cx|$; $e^{-u}=\left|\ln|Cx|\right|$; $u=-\ln\left|\ln|Cx|\right|$; $y=-x\ln\left|\ln|Cx|\right|$ - общий интеграл.

Ответ: $y=-x\ln\left|\ln|Cx|\right|$.

Задание 10. Решить задачу Коши, при заданных начальных условиях $xy'-y=x\operatorname{tg}\frac{x}{y}$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$.

Решение

$x\frac{dy}{dx}-y=x\operatorname{tg}\frac{x}{y}$, $xdy-\left(y+x\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)dx=0$. Поскольку уравнение однородное, то переходя к замене $u=\frac{y}{x}$, получим $x\left(xdu+udx\right)-\left(ux+x\operatorname{tg}u\right)dx=0$, $x^2du+xudx-xudx-x\operatorname{tg}udx=0$, $xdu-\operatorname{tg}udx=0$, $\frac{du}{\operatorname{tg}u}=\frac{dx}{x}$, $\ln\left|\sin u\right|=\ln\left|Cx\right|$, $\sin u=Cx$, $u=\arcsin Cx$. Общее решение $y=x\arcsin Cx$.

Найдём *C*, используя начальное условие $y(1)=\frac{\pi}{2}$. $\frac{\pi}{2}=\arcsin C$, $C=1$.

Подставляя *C* в общее решение, получаем частное решение $y=x\arcsin x$

Ответ: $y=x\arcsin x$.

ДКР

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка:
$x\left(1+y^2\right)dx+y\left(2-x^2\right)dy=0$; $\left(x^2+2xy\right)dx-3xydy=0$.
2. Решить задачу Коши $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$, $y(0)=0$.

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка:
$x\sqrt{1+y^2}dx-y\sqrt{1-x^2}dy=0$; $x\operatorname{tg}\frac{y}{x}=xy'-y$.
2. Решить задачу Коши $2xydx+\left(y^2-x^2\right)dy=0$, $y(2)=1$.

Домашнее задание

1. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
2. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. №№ 3902 –3905, 3913 – 3915, 3934, 3936, 3945 - №3947.

ПЗ №37. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

1. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Интегрирование уравнения Бернулли.
3. Интегрирование дифференциальных уравнений в полных дифференциалах.

ПЗ №38. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.

Интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков, допускающих понижение порядка.

ПЗ №39. Структура общего решения линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью специального вида.

ПЗ №40. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения. Метод вариации произвольных постоянных.

Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных.

ПЗ №41. Системы дифференциальных уравнений.

Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

ПЗ №42. Итоговое занятие по разделу.

Выполнение заданий коллоквиума в форме контролирующего теста № 4 «Дифференциальные уравнения»: интегрирование дифференциальных уравнений, решение задачи Коши.

ПЗ №43. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда (с разработкой занятия).

1. Вычисление суммы ряда.
2. Проверка необходимого признака сходимости числового ряда.

Вычисление суммы ряда.

Теоретические сведения

Числовым рядом называется выражение $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, *n*-ный член ряда называется также общим членом ряда. Ряд считается заданным, если задано правило, позволяющее по известному номеру его члена *n* записать этот член ряда. Чаще всего ряд задаётся формулой общего члена ряда $a_n = f(n)$.

Сумма *n* первых членов ряда называется *n–нойчастичной суммой ряда* и обозначается символом S_n: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Определение. Если последовательность частичных сумм числового ряда имеет предел, то ряд называют сходящимся и предел последовательности частичных сумм S= $\lim_{n \to +\infty} S_n$ принимают за сумму ряда. В этом случае пишут $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Символом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обозначается как сам ряд, так, в случае сходимости, и его сумма.

Ряд называется расходящимся, если $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$.

Таким образом, возникает задача: научиться выяснять, сходится заданный ряд или расходится. Чтобы ответить на этот вопрос, исходя непосредственно из определения, надо составить последовательность частичных сумм ряда и выяснить, имеет она предел или не имеет.

Практические задания

Задание 1. Доказать сходимость или расходимость ряда, пользуясь определением:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n)(c+1+n)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$.

Решение

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Члены этого ряда образуют арифметическую прогрессию, общий член последовательности частичных сумм $S_n = 1+2+3+\ldots+n$ можно записать по известной формуле в виде $S_n = \frac{1+n}{2} n$, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2} = \infty \Rightarrow$ ряд расходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$. Члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ со знаменателем $q = \frac{1}{3}$ и $a = 2$, сумму найдём по формуле $S = \frac{a}{1-q}$. $S = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow$ ряд сходится.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n)(c+1+n)}$. Составим n-ную частичную сумму данного ряда: $S_n = \frac{1}{(c+1)(c+2)} + \frac{1}{(c+2)(c+3)} + \frac{1}{(c+3)(c+4)} + \ldots + \frac{1}{(c+n)(c+1+n)} + \ldots$, где c – постоянная величина $(c \neq -n, n = 1,2,3,\ldots)$.

Чтобы упростить выражение для S_n преобразуем формулу для общего члена ряда, разлагая a_n на элементарные дроби. Положим, что

$$\frac{1}{(c+n)(c+1+n)} = \frac{A}{c+n} + \frac{B}{c+1+n} = \frac{(A+B)n + (A+B)c + A}{(c+n)(c+1+n)}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в числителях обеих частей равенства, получаем:

$\begin{cases} A+B=0; \\ (A+B)c + A = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1; \\ B=-1. \end{cases}$ Поэтому $\frac{1}{(c+n)(c+1+n)} = \frac{1}{c+n} - \frac{1}{c+1+n}$. Выражение для S_n принимает вид $S_n = \left(\frac{1}{c+1} - \frac{1}{c+2}\right) + \left(\frac{1}{c+2} - \frac{1}{c+3}\right) + \left(\frac{1}{c+3} - \frac{1}{c+4}\right) + \ldots$

$+\left(\frac{1}{c-1+n} - \frac{1}{c+n}\right) + \left(\frac{1}{c+n} - \frac{1}{c+1+n}\right)$. Приводя подобные члены, получаем $S_n = \frac{1}{c+1} - \frac{1}{c+1+n}$. Переходя к пределу, находим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{c+1}$, следовательно, ряд сходится.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Запишем общий член данного ряда в виде $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$, тогда $S_n=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\ldots+$ $(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)$. $S=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty\Rightarrow$ ряд суммы не имеет и является расходящимся.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$. Непосредственно находим:

$S_n=\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)+\ldots+$

$+\left(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}\right)+\left(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=$

$=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$. Следовательно, ряд сходится, его сумма равна $S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$.

Ответ: 1) ряд расходится; 2) ряд сходится; 3) ряд сходится; 4) ряд сходится; 5) ряд расходится; 6) ряд сходится.

Проверка необходимого признака сходимости числового ряда

Теоретические сведения

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то предел его общего члена равен нулю: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Отсюда вытекает достаточный признак расходимости: если $\lim_{n\to+\infty}\neq 0$, торяд расходится. Если же $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, то о сходимости ряда ещё ничего нельзя сказать, но есть смысл исследовать ряд дальше с помощью достаточных признаков сходимости.

Практические задания

Задание 2. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для следующих рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n+4}{5n+7}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+6}{2n}$;4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^3+7}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln n$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n-3}{n+1}\right]^n$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{5}{n}$; 9) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{n}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+14n+23}{n^3+5n-6}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\ln\left|\cos\frac{\pi}{n}\right|$.

Решение

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n+4}{5n+7}$; $a_n=\frac{9n+4}{5n+7}$; $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9n+4}{5n+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{9}{5}\neq 0$, ряд расходится;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$; $a_n=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$; $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=1\neq 0$, ряд расходится;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+6}{2n}$; $a_n=\frac{n^2+6}{2n}$; $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6}{2n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\infty$, ряд расходится;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^3+7}$; $a_n=\frac{5n}{n^3+7}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{n^3+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0$ - необходимый признак выполняется, вследствие чего ряд может быть или сходящимся или расходящимся, что можно установить лишь после дополнительного исследования; вопрос о сходимости открытый;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln n$; $a_n=\frac{1}{n}\ln n$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (при вычислении предела применено правило Лопиталя); вопрос о сходимости открытый;

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n-3}{n+1}\right]^n$; $a_n=\left[\frac{n-3}{n+1}\right]^n$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-3}{n+1}\right]^n=\left[1^{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{-4}{n+1}\right]^n=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{-4}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-4}}\right\}^{\frac{-4n}{n+1}}=e^{-4}\neq 0$; ряд расходится;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$; $a_n=\frac{n^2}{5^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{5^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{5^n\ln 5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{5^n\ln 5\ln 5}=0$ (при нахождении предела дважды применено правило Лопиталя); вопрос о сходимости открытый.

8) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{5}{n}$; $a_n=n\sin\frac{5}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{5}{n}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{n\to\infty}5\frac{\sin\frac{5}{n}}{\frac{5}{n}}=\left[\frac{0}{0}\right]=5\neq 0$

(воспользовались первым замечательным пределом: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$); ряд расходится.

9) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{n}}$; $a_n=n^{\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=\left[\infty^0\right]=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}\ln\lim\limits_{n\to\infty}n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=e^0=1\neq 0$; ряд расходится;

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+14n+23}{n^3+5n-6}$; $a_n=\frac{n^2+14n+23}{n^3+5n-6}$; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+14n+23}{n^3+5n-6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=0$; вопрос о сходимости открытый;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\ln\cos\frac{\pi}{n}$; $a_n=n^2\ln\cos\frac{\pi}{n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\cos\frac{\pi}{n}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(\cos^2\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}n^2\ln\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)=$

$=-\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}n^2\sin^2\frac{\pi}{n}=-\frac{1}{2}\pi^2\neq 0$ (мы заменили здесь бесконечно малую $\ln\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)$ эквивалентной ей $-\sin^2\frac{\pi}{n}$ и бесконечно малую $\sin\frac{\pi}{n}$ эквивалентной ей $\frac{\pi}{n}$); ряд расходится.

Ответ: 1) ряд расходится; 2) ряд расходится; 3) ряд расходится; 4) вопрос о сходимости открытый; 5) вопрос о сходимости открытый; 6) ряд расходится; 7) вопрос о сходимости открытый; 8) ряд расходится; 9) ряд расходится; 10) вопрос о сходимости открытый; 11) ряд расходится.

ДКР

Вариант 1

1. Проверить необходимый признак сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n!+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{n^3+n^4+3};\ \sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{4n-1}{7n+2}\right)^n;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\ln(n+2)\right)^3}{n+2};$$

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Вариант 2

1. Проверить необходимый признак сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4}{3n^3+5n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3\cdot n!};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+1)}{n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{2+4n}\right)^{2n};\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{20n+2};$$

2. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+3)}$.

Домашнее задание

1. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.

2. Г.Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа: №№ 2728, 2730, 2731, 2740, 2741, 2742, 2751, 2754, 2758, 2762, 2763, 2765, 2766, 2768, 2769.

ПЗ №44. Достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Исследование числовых рядов с помощью достаточных признаков сходимости.

ПЗ №45. Знакопеременные и знакочередующиеся и ряды.

1. Исследование знакопеременных рядов на абсолютную сходимость.
2. Признак Лейбница для исследования знакопеременных рядов.

ПЗ №46. Функциональные ряды. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Некоторые приложения степенных рядов

1. Нахождение области сходимости функционального ряда.
2. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда.
3. Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена.
4. Приложение числовых рядов к приближённому вычислению интегралов.

ПЗ №47. Периодические функции. Гармонические колебания. Ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье. Тригонометрический ряд в комплексной форме. Интеграл Фурье.

1. Решение задач на нахождение амплитуды, частоты, периода и фазы колебаний.
2. Применение теоремы Дирихле.
3. Разложение функций в ряд Фурье.
4. Представление функции интегралом Фурье.

ПЗ №48. Итоговое занятие по разделу.

Выполнение заданий коллоквиума в форме контролирующего теста №5 «Ряды»: определение сходимости числового ряда, определение сходимости знакопеременного и знакочередующегося рядов, определение области сходимости функционального ряда, определение радиуса сходимости степенного ряда, разложение функции в ряд Тейлора, разложение функции в ряд Фурье.

Диагностические контрольные работы (ДКР)

ДКР проводятся на практическом занятии и оцениваются по пятибалльной шкале.

Задания для диагностических контрольных работ

Тема №1.1: Основы дискретной математики.

Составить таблицу истинности логического выражения $\left(\overline{A\&B}\right)\to\left(A\leftrightarrow\overline{B}\right)$.

Тема №2.1: Определители.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}$.

Тема №2.2: Матрицы.

1. Вычислить произведение $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -5\\ 4 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.
2. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -5 & 0\end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Тема №2.3: Системы линейных уравнений.

Решить систему линейных уравнений $\begin{cases}2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6.\end{cases}$ с помощью обратной матрицы.

Темы №№2.4-2.6: Векторы. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Линейное пространство. Базис и размерность линейного пространства.

1. Найти орт вектора $\boldsymbol{a}=(4;3;0)$.
2. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Найти $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=2$.
3. Вычислить $\left|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\right|$, если $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=3$, а угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 30^0.
4. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\boldsymbol{b}|=4$, $\left|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\right|=6$, найти $|\boldsymbol{a}|$.
5. Вычислить смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$, если $\boldsymbol{a}=(2;1;4)$, $\boldsymbol{b}=(5;0;1)$, $\boldsymbol{c}=(2;0;4)$.

Темы №№2.7-2.9: Аналитическая геометрия на плоскости. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости. Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение прямой в пространстве.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-2;4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-1;4)$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-6z+5=0$.

3. Определить вид и расположение кривой $2x^2-y^2-16z-2y+29=0$.

4. Дан тетраэдр с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;-3;5)$, $C(6;2;5)$, $D(3;-2;-5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

5. Даны точки $M_1(0;-1;3)$ и $M_2(1;3;5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Темы №№3.3-3.6: Основные виды отображений и их пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы. Основные теоремы теории пределов. Непрерывность функции.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^2+3}{x-3x^3-6x^4}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 3x}{e^{2x^2}-1}$.

Исследовать на непрерывность функцию. Найти точки разрыва и указать их характер.

$$y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0;\\ \frac{1}{x}, & -0<x\le 3;\\ 2, & x>3.\end{cases}$$

Темы №№4.1-4.3: Дифференциал и производная. Частные производные и полные дифференциалы.

1. Найти производные функций:

$y=\left(7x^3+5x^2-3\right)^4$; $y=7\operatorname{tg}\frac{x}{7}+\cos^2 3x$; $y=e^{\arccos x^2}$; $y=\ln\frac{1-e^x}{1+e^x}$.

2. Для функции, заданной параметрически $\begin{cases}x=t^3+3t^2\\ y=\ln\left(t^2+4t\right)\end{cases}$, найти производные.

3. Продифференцировать функцию $y=x^{\sin x}$, используя правило логарифмического дифференцирования:

4. Для функции $z\left(x,y\right)=\frac{x^6}{\sqrt{y}}+x^3y^2+y$ найти z'_x и z'_y в точке *M*(1;1).

5. Дана функция $z=uv^3$, где $u=-5x+3y+1$, $v=2x+4y-1$. Найти $z'_x\left(0;0\right)$.

Темы №№5.1-5.3: Первообразная и неопределенный интеграл. Интегралы по мере. Определенный интеграл.

1. Вычислить $\int\limits_{-1}^{-2/3} \frac{dx}{(3x+5)^3}$.

2. Вычислить $\int \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2-8x+13}}dx$.

3. Вычислить $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

4. Вычислить $\int\limits_D xdxdy$, где D ограничена линиями: $x=y^2$, $y=-1$, $x=0$.

5. Вычислить $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^7}}$, где D – правая половина кольца $1\le x^2+y^2\le 4$.

Темы №№6.1-6.3: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка
$x\left(1+y^2\right)dx+y\left(2-x^2\right)dy=0$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка
$y'=\frac{y}{x}-2\sin\frac{y}{x}$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка
$\left(xy^4+x^2+3\right)dx+\left(y^2+2x^2y^3\right)dy=0$.

4. Решить задачу Коши $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y(1)=1$.

Тема №7.6: Структура общего решения линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Решить задачу Коши: $y''+y=4e^x$, $y(0)=4$, $y'(0)=-3$.

Темы №№7.1-7.5: Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости числовых рядов. Знакопеременные и знакочередующиеся и ряды. Функциональные ряды. Степенные ряды.

1. Исследовать на сходимость числовые ряды:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^3+9n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n+1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{2n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

2. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+8}}$.

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^3\cdot 6^n}$.

Коллоквиумы по разделам дисциплины в форме контролирующих тестов (КТ)

Подготовка к контролирующим тестам (КТ) по разделам предполагает проработку теоретического материала по данному разделу дисциплины, закрепление умений и навыков решения задач, полученных при выполнении практических заданий и типовых расчётов.

КТ проводятся на одном из практических занятий и оцениваются по пятибалльной шкале

Контролирующие тесты (КТ)

КТ №1 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»				
Отметьте номер правильного ответа. Варианты ответов				
№	Задания	1	2	3
1	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B.$ Найти сумму элементов 3 столбца матрицы В.	34	-18	28
2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$. Найти A^{-1}.	$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}25 \\ -0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$
3	Дана система уравнений $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 3z = 8 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$. Найти $\Delta, \Delta_z, z.$	19,-38,-2	19,-19,-1	19,38,2
4	Найти $np_{\bar{b}-\bar{c}}\,\bar{a}$, если $\bar{a} = (2;7;-3)$, $\bar{b} = (6;-5;3)$, $\bar{c} = (4;-3;4)$.	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{5}{7}$

5	Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(3;-4;1)$, $B(2;2;2)$, $C(-5;2;3)$.	$4\sqrt{51}$	$2\sqrt{51}$	$\sqrt{51}$
6	Определить β, при котором компланарны векторы $\bar{a}=(2;3;4)$, $\bar{b}=(0;\beta;2)$, $\bar{c}=(3;4;0)$.	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1
7	Уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;-2;3)$ и $B(5;-4;2)$ имеет вид:	$\frac{x-5}{-4}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-2}{5}$	$x-4=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{2}$	$x-4=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{-1}$
8	Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;0;1)$, $B(-4;1;1)$, $C(1;5;2)$.	$25x-y+5z-30=0$	$x+5y-25z+24=0$	$x-5y+25z-26=0$
9	Найти собственные значения матрицы $\begin{pmatrix}9 & 12\\12 & 16\end{pmatrix}$	0 и 25	1 и 9	0 и 20
10	Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости $x-y+2z=0$	(0;0;2)	(2;2;0)	(4;4;0)

КТ №2 «Пределы, производные»

Отметьте номер правильного ответа. Варианты ответов

№	Задания	1	2	3
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+2}{5-x^2+4x^5}=\ldots$	$\frac{3}{5}$	∞	$\frac{2}{5}$
2	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}=\ldots$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
3	$\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{x}{x^2-9}}=\ldots$	e	e^{-1}	e^{-2}
4	Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+3x^4\right)^5-1}{x^3\sin 9x}$	0	$\frac{5}{3}$	1
5	Найти $y'(3)$, если $y=x^2\,ctg\,x$.	$6\,ctg\,3-\dfrac{9}{\sin^2 3}$	$ctg\,3$	$6\,ctg\,3-\dfrac{1}{\sin^2 3}$
6	Для функции $y=3^{\operatorname{arctg}\,7x}$ найти y'.	$-\dfrac{3^{\operatorname{arctg}\,7x}\cdot 7\ln 3}{1+49x^2}$	$\dfrac{3^{\operatorname{arctg}\,7x}\cdot 21\cdot\ln 3}{1+49x^2}$	$\dfrac{3^{\operatorname{arctg}\,7x}}{1+49x^2}$

7	Для функции $z=\frac{3y}{5\sqrt[3]{x}}+2x^5y$ найти $\left(z'_x+z'_y\right)$ в точке М(1;1)	$12\frac{2}{5}$	$12\frac{4}{5}$	$12\frac{3}{5}$
8	Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x^3=\ln y+x^2y^2$	$\frac{1+2x^2y^2}{3x^2y-2y^3x}$	$\frac{3x^2y-2xy^3}{1-2x^2y^2}$	$\frac{3x^2y-2xy^3}{1+2x^2y^2}$
9	Найти интервал(ы) вогнутости функции $y=3x^5-2x^4$.	$(-\infty;0)\cup(0,4;+\infty)$	$(-\infty;0,4)$	$(0,4;+\infty)$
10	Выбрать правильные утверждения: Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы, то А) $\lim(f+g)=\lim f+\lim g$; Б) $\lim(f\cdot g)=\lim f\cdot\lim g$; В) $\lim\frac{f}{g}=\frac{\lim f}{\lim g}$.	А,Б,В	Нет прав.	А,Б

КТ №3 «Интегрирование»				
Отметьте номер правильного ответа. Варианты ответов				
№	Задания	1	2	3
1	$\int_0^1 xtg\left(1-x^2\right)dx =$	$\frac{1}{2}\ln\cos 1$	$-\frac{1}{2}\ln\cos 1$	$-\frac{1}{2}\ln\sin 1$
2	$\int_0^1 xe^x dx =$	2	$e-1$	e
3	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin x\cdot\sin 3x dx =$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
4	$\int \frac{x-1}{x^2+6x-16}dx =$	$\frac{1}{2}\ln\left\|x^2+6x-16\right\| -$ $-\frac{4}{5}\ln\left\|\frac{x-2}{x+8}\right\| + C$	$\ln\left\|x^2+6x-16\right\| -$ $-\frac{2}{5}\ln\left\|\frac{x-2}{x+8}\right\| + C$	$\frac{1}{2}\ln\left\|x^2+6x-16\right\| -$ $-\ln\left\|\frac{x-2}{x+8}\right\| + C$
5	$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} =$	$3-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$1-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$2-\frac{2}{\sqrt{3}}$
6	Несобственный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ (указать все	Б,В,Д	Б,В	А,Г

	правильные ответы) А) сходится; Б) расходится; В) $=\infty$;Г) $\neq\infty$;Д) от неограниченной функции.			
7	Изменить порядок интегрирования $\int_1^3 dy \int_{y+1}^4 f(x,y)dx$	$\int_2^4 dx \int_1^{x-1} f(x,y)dy$	$\int_0^1 dx \int_{x-1}^0 f(x,y)dy$	$\int_1^3 dx \int_0^{x-1} f(x,y)dy$
8	Вычислить $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^2 xdx \int_0^3 z^2 dz$	4	30	16
9	Вычислить $\int_L \frac{dl}{\sqrt{1+x^2}}$, где *L* – участок кривой $y=\frac{x^2}{2}$ между точками А(0;0)и $B\ (2;2)$	2	1	4
10	Вычислить работу силы $\vec{F}=(3x^2+4xy)\vec{i}+(2x^2-3y^2)\vec{j}$ на прямолинейном пути от $M_1(0;0)$ до $M_2(1;1)$	1	5	4

КТ №4 «Дифференциальные уравнения»				
Отметьте номер правильного ответа. Варианты ответов				
№	*Задания*	1	2	3
1	Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x} - 3e^{-\frac{y}{x}}$	$e^{\frac{y}{x}} = 3\ln\|x\| + c$	$e^{\frac{y}{x}} = c - \frac{1}{3}\ln\|x\|$	$e^{\frac{y}{x}} = \ln\|x\| + c$
2	Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \sin^2 x$	$\sin x(\cos x + C)$	$\sin x(\sin x + C)$	$\cos x(\sin x + C)$
3	Среди перечисленных дифференциальных уравнений найти все уравнения в полных дифференциалах: А) $(4xy^3 - x^2 - 3)dx + (6x^2y^2 + y)dy = 0$; Б) $(x^2 - 2x + 5y^2)dx + (2y^2 + 10xy)dy = 0$; В) $(6x^2y^2 + y + 2)dx + (4xy^3 - x^2)dy = 0$	А	Б	А,Б
4	Указать вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 9y = 4\cos 3x$	$(A\cos 3x + B\sin 3x)x^2$	$A\cos 3x + B\sin 3x$	$Ax\cos 3x$

5	Решив задачу Коши, найти y(5): $y'' + 5e^{\frac{x}{5}} = 0; y(0) = -125; y'(0) = -25$	$-125e$	$125e$	$5e$

КТ №5 «Ряды»

Отметьте номер правильного ответа. Варианты ответов

№	Задания	1	2	3
1	Дан числовой положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Известно, что $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = m$. Укажите все невозможные сочетания k и m: А) $k<1;\ m>1$;Б) $k=0;\ m=\infty$;В) $k<1;\ m<1$;Г) $k>1;\ m<1$;Д) $k>1;\ m>1$.	В,Д	А,Г	А,Б,Г
2	Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0
3	Определить, какие ряды сходятся: А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{2n+3}$; В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{8^n}$;Г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$.	А,В	В,Г	А,В,Г

4	Исследовать на сходимость ряды А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+5)^n}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^6+3}$.	А сх. абс. Б сх. усл.	А расх. Б сх. усл.	Оба сх.усл.
5	Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-5)^n}{n^3}$	$\frac{1}{5}$	2	5
6	Найти область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2x)^n}$	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$
7	Разложить в ряд Маклорена функцию $\frac{e^{3x}-1}{9x}$	$\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\ldots$	$\frac{1}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+\ldots$	$\frac{x}{3}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2}+\ldots$
8	Функция $f(x)=\begin{cases}-2, -2\le x<0\\ 2x,\ 0\le x\le 2\end{cases}$ разложена на отрезке $[-2;2]$ в тригонометрический ряд Фурье. Этот ряд в точке $x=0$ сходится к	0	1	-2
9	Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\begin{cases}3,\ 0\le x<2\\ 0,\quad 2\le x\le 5\end{cases}$	$-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n x}{5}$	$\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{5}-1}{n}\times$ $\times\sin\frac{\pi n x}{5}$	$-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{5}-1}{n}\times$ $\times\sin\frac{\pi n x}{5}$

Информационная карта банка тестовых заданий к коллоквиумам по разделам дисциплины

Дисциплина Математика

Тематическая структура банка ТЗ

Таблица 2

№	Наименование темы	Наименование раздела	Всего заданий	Количество форм тестовых заданий			
				Открытого типа	Закрытого типа	На соответствие	Упорядочение
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	Тема 2.1. «Определители»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»	10	-	1	-	-
2	Тема 2.2. «Матрицы»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»		-	1	-	-
3	Тема 2.3. «Системы линейных уравнений»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»		-	1	-	-
4	Тема 2.4. «Векторы. Скалярное произведение векторов»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»		-	2	-	-
5	Тема 2.5. «Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»		-	1	-	-
6	Тема 2.6. «Линейное пространство. Базис и размерность линейного пространства»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»		-	1	-	-
7	Тема 2.7. «Аналитическая геометрия на плоскости»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»		-	1	-	-
8	Тема 2.8. «Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение плоскости»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»		-	1	-	-
9	Тема 2.9. «Аналитическая геометрия в пространстве. Уравнение прямой в пространстве»	Раздел 2 «Линейная алгебра и аналитическая геометрия»		-	1	-	-

Продолжение Таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
10	Тема 3.4. «Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Первый и второй замечательные пределы»	Раздел 3 «Введение в математический анализ»	10	-	4	-	-
11	Тема 3.5. «Основные теоремы теории пределов»	Раздел 3 «Введение в математический анализ»		-	1	-	-
12	Тема 3.6. «Непрерывность функции»	Раздел 3 «Введение в математический анализ»		-	1	-	-
13	Тема 4.1. «Дифференциал и производная»	Раздел 4 «Дифференциальное исчисление»		-	1	-	-
14	Тема 4.2. «Частные производные и полные дифференциал»	Раздел 4 «Дифференциальное исчисление»		-	1	-	-
15	Тема 4.3. «Производные и дифференциалы высших порядков»	Раздел 4 «Дифференциальное исчисление»		-	1	-	-
16	Тема 4.6. «Исследование функций с помощью дифференциального исчисления»	Раздел 4 «Дифференциальное исчисление»		-	1	-	-
17	Тема 5.1. «Первообразная и неопределенный интеграл»	Раздел 5 «Интегральное исчисление»	10	-	1	-	-
18	Тема 5.3. «Определенный интеграл»	Раздел 5 «Интегральное исчисление»		-	4	-	-
19	Тема 5.4. «Несобственные интегралы»	Раздел 5 «Интегральное исчисление»		-	1	-	-
20	Тема 5.5. «Двойной интеграл»	Раздел 5 «Интегральное исчисление»		-	1	-	-
21	Тема 5.6 «Тройной интеграл»	Раздел 5 «Интегральное исчисление»		-	1	-	-
22	Тема 5.7. «Криволинейные интегралы»	Раздел 5 «Интегральное исчисление»		-	1	-	-
23	Тема 5.8. «Приложения интегралов в геометрии и механике»	Раздел 5 «Интегральное исчисление»		-	1	-	-
24	Тема 6.1. «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения первого порядка»	Раздел 6 «Дифференциальные уравнения»	5	-	1	-	-

Продолжение Таблицы 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
25	Тема 6.2. «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли»	Раздел 6 «Дифференциальные уравнения»		-	1	-	-
26	Тема 6.3. «Уравнения в полных дифференциалах»	Раздел 6 «Дифференциальные уравнения»		-	1	-	-
27	Тема 6.5. «Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка»	Раздел 6 «Дифференциальные уравнения»		-	1	-	-
28	Тема 6.6. «Структура общего решения линейного однородного и неоднородного дифференциального уравнения. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами»	Раздел 6 «Дифференциальные уравнения»		-	1	-	-
29	Тема 7.1. «Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда»	Раздел 7 «Ряды»	9	-	1	-	-
30	Тема 7.2. «Достаточные признаки сходимости числовых рядов»	Раздел 7 «Ряды»		-	2	-	-
31	Тема 7.3. «Знакопеременные и знакочередующиеся и ряды»	Раздел 7 «Ряды»		-	1	-	-
32	Тема 7.4. «Функциональные ряды»	Раздел 7 «Ряды»		-	1	-	-
33	Тема 7.5. «Степенные ряды»	Раздел 7 «Ряды»		-	1	-	-
34	Тема 7.6. «Ряд Тейлора. Некоторые приложения степенных рядов»	Раздел 7 «Ряды»		-	1	-	-
35	Тема 7.8. «Разложение функций в ряд Фурье»	Раздел 7 «Ряды»		-	2	-	-

2.2 Формы промежуточной аттестации

Подготовка к промежуточной аттестации осуществляется на протяжении всего периода изучения разделов дисциплины. Для подготовки к промежуточной аттестации выделяются также внеаудиторные часы для СРС.

Промежуточная аттестация осуществляется во время сессии в форме письменных экзаменов в 1 – ом и во 2 – м семестрах.

Экзамен предполагает оценивание ответов на теоретические вопросы и выполненных заданий по экзаменационному билету по пятибалльной шкале.

Экзаменационный билет включает в себя 2 теоретических вопроса и практические задания.

Список теоретических вопросов для промежуточного контроля в форме экзамена (семестр 1)

1. Основы теории множеств. Основы математической логики. Элементы комбинаторики и теории графов.
2. Определители 2-го и 3-го порядка. Их основные свойства.
3. Минор и алгебраическое дополнение. Разложение определителя по элементам строки или столбца.
4. Понятие об определителе *n*-го порядка. Его вычисление.
5. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера.
6. Матрицы, их виды. Операции над матрицами и их свойства.
7. Обратная матрица. Ее вычисление.
8. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.
9. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
10. Метод Гаусса.
11. Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства.
12. Орты, декартова система координат. Разложение вектора по ортам.
13. Скалярное произведение векторов. Его свойства и вычисление в декартовых координатах. Условие ортогональности векторов.
14. Векторное произведение векторов. Его свойства и вычисление в декартовых координатах. Условие коллинеарности векторов.
15. Смешанное произведение векторов. Его свойства и вычисление в декартовых координатах. Условие компланарности трех векторов.
16. Уравнение плоскости в нормальной, векторной и координатной форме.
17. 0бщее уравнение плоскости. Понятие гиперплоскости.
18. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.
19. Векторное, каноническое и параметрическое уравнение прямой. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
20. Определение метрического пространства. Примеры.
21. Предел отображения. Предел последовательности, предел функции одной и многих переменных. Предел в бесконечно удаленной точке.
22. Бесконечно малые, бесконечно большие, ограниченные и отделимые от нуля величины. Их основные свойства. Основные свойства пределов.
23. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Эквивалентные бесконечно малые и бесконечно большие. Их свойства. Таблица эквивалентных бесконечно малых.
24. Первый и второй замечательные пределы. Их следствия.
25. Непрерывность отображения. Непрерывность числовой функции одной и многих переменных.
26. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

27. Дифференциал отображения. Дифференциал и производная числовой функции одной переменной. Таблица производных.
28. Частные производные и полный дифференциал функции многих переменных.. Производная и дифференциал сложной функции многих переменных.. Производная неявной функции одной и многих переменных.
29. Производные и дифференциалы высших порядков для функции одной переменной. Частные производные и дифференциалы высших порядков для функции многих переменных.
30. Свойства функций, дифференцируемых на интервале: теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Теорема Лопиталя. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя.
31. Формула Тейлора для функции одной переменной. Представление по формуле Тейлора основных элементарных функций. Выделение главной части БМ с помощью формулы Тейлора.
32. Приложение формулы Тейлора к исследованию функции: возрастание, убывание, экстремумы; выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты плоских кривых.
33. Формула Тейлора для функции многих переменных. Локальные и условные экстремумы функции многих переменных. Глобальные экстремумы функции многих переменных. Производная по направлению. Градиент.

Список теоретических вопросов для промежуточного контроля в форме экзамена (семестр 2)

1. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Определенный интеграл и его свойства.
3. Интеграл по мере области.
4. Вычисление определенного интеграла. Формула и Ньютона-Лейбница.
5. Интегрирование путем замены переменной и по частям.
6. Несобственные интегралы и их свойства.
7. Применение определенного интеграла в физике и технике.
8. Ряды с положительными членами.
9. Признаки сходимости рядов с положительными членами: Даламбера, Коши- радикальный. Коши-интегральный, сравнения, необходимый признак.
10. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница.
11. Признаки сходимости знакочередующихся рядов.
12. Функциональные ряды. Область сходимости, равномерная сходимость.
13. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости.
14. Ряд Тейлора. Разложение функций в ряд Тейлора.
15. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
16. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия и задача Коши.
17. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
18. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
19. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
20. Уравнения высших порядков.
21. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.
22. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.
23. Метод вариации произвольных постоянных для решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.
24. Системы линейных дифференциальных уравнений.
25. Применение дифференциальных уравнений и систем в технике.

Практические задания для промежуточного контроля в форме экзамена (семестр 1)

1. Составить таблицу истинности логического выражения $\left(\overline{A\&B}\right)\to\left(A\leftrightarrow\overline{B}\right)$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить произведение $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

5. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ с помощью обратной матрицы.

6. Найти орт вектора $\boldsymbol{a} = (4;3;0)$.

7. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Найти $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, если $|\boldsymbol{a}| = 3$, $|\boldsymbol{b}| = 2$.

8. Вычислить $\left|[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]\right|$, если $|\boldsymbol{a}| = 2$, $|\boldsymbol{b}| = 3$, а угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен 30^0.

9. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\boldsymbol{b}| = 4$, $\left|[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}]\right| = 6$, найти $|\boldsymbol{a}|$.

10. Вычислить смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$, если $\boldsymbol{a} = (2;1;4)$, $\boldsymbol{b} = (5;0;1)$, $\boldsymbol{c} = (2;0;4)$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-2;4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-1;4)$ перпендикулярно плоскости $2x + 3y - 6z + 5 = 0$.

13. Определить вид и расположение кривой $2x^2 - y^2 - 16z - 2y + 29 = 0$.

14. Дан тетраэдр с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;-3;5)$, $C(6;2;5)$, $D(3;-2;-5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

15. Даны точки $M_1(0;-1;3)$ и $M_2(1;3;5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x - 3x^3 - 6x^4} =$

17. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{3x+2} =$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{e^{2x^2} - 1} =$

19. Исследовать на непрерывность функцию. Найти точки разрыва и указать их характер.

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0; \\ \frac{1}{x}, & -0 < x \le 3; \\ 2, & x > 3. \end{cases}$$

20. Найти производные функций:

21. $y=\left(7x^3+5x^2-3\right)^4$; $y=7\operatorname{tg}\dfrac{x}{7}+\cos^2 3x$; $y=e^{\arccos x^2}$; $y=\ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

22. Для функции, заданной параметрически $\begin{cases} x=t^3+3t^2 \\ y=\ln\left(t^2+4t\right) \end{cases}$, найти производные.

23. Продифференцировать функцию $y=x^{\sin x}$, используя правило логарифмического дифференцирования:

24. Для функции $z\left(x,y\right)=\dfrac{x^6}{\sqrt{y}}+x^3y^2+y$ найти z'_x и z'_y в точке *M*(1;1).

25. Дана функция $z=uv^3$, где $u=-5x+3y+1$, $v=2x+4y-1$. Найти $z'_x\left(0;0\right)$.

Практические задания для промежуточного контроля в форме экзамена (семестр 2)

1. Вычислить $\int\limits_{-1}^{-2/3}\dfrac{dx}{\left(3x+5\right)^3}$.

2. Вычислить $\int\dfrac{\left(x+3\right)}{\sqrt{x^2-8x+13}}dx$.

3. Вычислить $\int\limits_{-1}^{2}\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

4. Вычислить $\int\limits_D xdxdy$, где D ограничена линиями: $x=y^2$, $y=-1$, $x=0$.

5. Вычислить $\iint\limits_D\dfrac{dxdy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^7}}$, где D – правая половина кольца $1\le x^2+y^2\le 4$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $x\left(1+y^2\right)dx+y\left(2-x^2\right)dy=0$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $y'=\dfrac{y}{x}-2\sin\dfrac{y}{x}$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка $\left(xy^4+x^2+3\right)dx+\left(y^2+2x^2y^3\right)dy=0$.

9. Решить задачу Коши $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y\left(1\right)=1$.

10. Решить задачу Коши: $y''+y=4e^x$, $y\left(0\right)=4$, $y'\left(0\right)=-3$.

11. Исследовать на сходимость числовые ряды:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{3n^3+9n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^{n+1}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{3n+2}\right)^{2n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\left(n+1\right)}{n+1}$.

12. Исследовать на сходимость знакопеременные ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-3\right)^n}{n\cdot 3^n+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{\sqrt{n+8}}$.

13. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(x+5\right)^n}{n^3\cdot 6^n}$.

Экзаменационный билет (1 семестр)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Прикладной математики и информатики»

БИЛЕТ №1
по дисциплине «Математика»

Направления подготовки 27.03.03, 27.03.04
ИАиИТ
1 семестр

1. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.
2. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
3. Практические задания:
   1) вычислить смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$, если $\boldsymbol{a}=(2;1;4)$, $\boldsymbol{b}=(5;0;1)$, $\boldsymbol{c}=(2;0;4)$;
   2) вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^2+3}{x-3x^3-6x^4}$;
   3) для функции $z(x,y)=\dfrac{x^6}{\sqrt{y}}+x^3y^2+y$ найти z'_x и z'_y в точке $M(1;1)$.

Составитель:
Ст. преп. Воропаева Л.В._____

Зав. кафедрой:
Проф., д.ф.-м.н. Радченко В.П..._____

«___»_____2021 г

Экзаменационный билет (2 семестр)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Прикладной математики и информатики»

БИЛЕТ №1
по дисциплине «Математика»

Направления подготовки 27.03.03, 27.03.04
ИАиИТ
2 семестр

4. Интеграл по мере области.
5. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости.
6. Практические задания:
   1) вычислить $\int_{-1}^{-2/3} \frac{dx}{(3x+5)^3}$;
   2) решить задачу Коши $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(1) = 1$;
   3) исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n + 1}$.

Составитель:
Ст. преп. Воропаева Л.В._____

Зав. кафедрой:
Проф., д.ф.-м.н. Радченко В.П..._____

«___»_____2021 г

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций, описание шкал оценивания

Оценка достижения запланированных результатов обучения производится по итогам отдельных видов текущего контроля и промежуточной аттестации. Характеристика процедуры оценивания знаний, умений и навыков представлена в табл. 3.

Характеристика процедуры промежуточной аттестации по дисциплине

Таблица 3

№	Наименование оценочного средства	Периодичность и способ проведения процедуры оценивания	Методы оценивания	Виды выставляемых оценок	Способ учета индивидуальных достижений обучающихся
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	Конспекты	2 раза в 1-м сем., письменно.	Экспертный.	Зачет/незачет	Рабочая книжка преподавателя.
2	ДКР	Систематически на практических занятиях, письменно, по окончании изучения соответствующих тем разделов дисциплины.	Экспертный.	По пятибалльной шкале. (Баллы).	Рабочая книжка преподавателя.
4	КТ	2 раза в 1-м сем.; 3 раза во 2-м сем.; письменно, по окончании изучения соответствующих разделов дисциплины.	Экспертный.	По пятибалльной шкале. (Баллы).	Рабочая книжка преподавателя.
5	Задачи практических занятий	Систематически на практических занятиях в 1-2 семестрах, письменно.	Экспертный.	Зачет/незачет.	Рабочая книжка преподавателя.
6	Промежуточная аттестация – экзамен	В конце семестра 1 –го семестра	Экспертный.	По пятибалльной шкале.	Экзаменационная ведомость, зачетная книжка, учебная карта, портфолио
7	Промежуточная аттестация – экзамен	В конце семестра 2 –го семестра	Экспертный.	По пятибалльной шкале.	Экзаменационная ведомость, зачетная книжка, учебная карта, портфолио

Шкала оценивания

«Зачет» – выставляется, если сформированность заявленных знаний, умений и навыков

обучающегося на 60% и более оценивается не ниже «удовлетворительно», при условии отсутствия критерия «неудовлетворительно».

«Отлично» – выставляется, если сформированность заявленных знаний, умений и навыков 95%, и более: студент показал прочные знания основных положений фактического материала, умение самостоятельно решать конкретные практические задачи повышенной сложности, свободно использовать справочную литературу, делать обоснованные выводы из результатов анализа конкретных ситуаций;

«Хорошо» – выставляется, если сформированность заявленных знаний, умений и навыков на 75% и более оценивается критериями «хорошо» и «отлично», при условии отсутствия оценки «неудовлетворительно», допускается оценка «удовлетворительно»: обучающийся показал прочные знания основных положений фактического материала, умение самостоятельно решать конкретные практические задачи, предусмотренные рабочей программой, ориентироваться в рекомендованной справочной литературе, умеет правильно оценить полученные результаты анализа конкретных ситуаций;

«Удовлетворительно» – выставляется, если сформированность заявленных знаний, умений и навыков компетенций 60% и более, оценивается критериями «удовлетворительно», «хорошо» и «отлично»: обучающийся показал знание основных положений фактического материала, умение получить с помощью преподавателя правильное решение конкретной практической задачи из числа предусмотренных рабочей программой, знакомство с рекомендованной справочной литературой;

«Неудовлетворительно» «Незачет» – выставляется, если знаний, умений и навыков обучающегося менее чем 60% (в соответствии с картами компетенций ОПОП) оценивается критериями «удовлетворительно», «хорошо» и «отлично»: при ответе обучающегося выявились существенные пробелы в знаниях основных положений фактического материала, неумение с помощью преподавателя получить правильное решение конкретной практической задачи из числа предусмотренных рабочей программой учебной дисциплины.

Ответы и решения обучающихся оцениваются по следующим общим критериям: распознавание проблем; определение значимой информации; анализ проблем; аргументированность; использование стратегий; творческий подход; выводы; общая грамотность.

Соответствие критериев оценивания планируемых результатов обучения системам оценок представлено в табл. 4.

Интегральная оценка

Таблица 4

Критерии	Традиционная оценка
5	5
4	4
3	3
2 и 1	2, Незачет
5, 4, 3	Зачет