Е.В. Башкинова

ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ И ТЕЧЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ПРАКТИКУМ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Самара 2015

министерство ОБРАЗОВАНИЯ и науки РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ»

Е.В. Башкинова

ОСНОВЫ ОПИСАНИЯ ДЕФОРМАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ И ТЕЧЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Самара
Самарский государственный технический университет
2015

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Самарского государственного технического университета.

УДК 531.3
ББК 22.251

Башкинова, Е.В.
Основы описания деформационного движения и течения сплошной среды: практикум по математическим моделям механики сплошных сред / Е.В. Башкинова. – Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2015, – 57 с..

Содержит 24 варианта по 7 заданий, относящихся к таким разделам дисциплины «Математические модели механики сплошных сред» как Кинематика деформируемой среды и Движение и течение. В методических рекомендациях к решению задач приведены краткие сведения и формулы по рассматриваемым темам. Практикум предназначен для студентов третьего курса направления 010400 – Прикладная математика и информатика.

Библиогр.: 5 назв.

Р е ц е н з е н т : к.ф.-м.н. В.Н. Маклаков

Предисловие

Дисциплина «Математические модели механики сплошных сред» соответствует вариативной части математического и естественнонаучного цикла (Б3.В.ОД.2) учебного плана бакалавров направления подготовки 010400 Прикладная математика и информатика.

В предлагаемом учебном пособии «Основы описания деформационного движения и течения сплошной среды: практикум по математическим моделям механики сплошных сред» предназначенном для студентов бакалавров третьего курса приведены задания для самостоятельной работы студентов по темам «Кинематика деформируемой среды» и «Движение и течение».

В разделе методических рекомендаций к решению задач подробно рассмотрены примеры, решения которых сопровождаются краткими теоретическими справками.

Необходимыми условиями для выполнения самостоятельной работы являются умения выполнять действия над тензорами разного порядка, владение навыками вычисления производной и преобразованием координат.

Введение

Выполнение предложенных вариантов включено в раздел самостоятельной работы и предусматривает следующее распределение часов:

№ п/п	Вид самостоятельной работы студента (СРС) и перечень дидактических единиц	Труд-сть, часов
1.	Выполнение домашней работы к практическому занятию №6. Перемещения и деформации. Кинематика деформируемой среды. Перемещения и деформации.	2
2.	Выполнение домашней работы к практическому занятию №7. Тензоры деформаций. Тензоры деформаций, коэффициенты длины и поворота.	2
3.	Выполнение домашней работы к практическому занятию №8. Главные деформации. Преобразование тензоров деформаций. Главные деформации Построение кругов Мора.	2
4.	Выполнение домашней работы к практическому занятию №9. Тензор скорости деформации. Скорость деформации. Завихренность. Приращение деформации. Физическая интерпретация тензоров скоростей деформаций и завихренности.	2
5.	Выполнение расчетно-графической работы по темам Движение, течение. Материальная производная. Скорость, ускорение, мгновенное поле скоростей. Траектории. Линии тока. Установившееся движение. Скорость деформации. Завихренность. Приращение деформации. Физическая интерпретация тензоров скоростей деформаций и завихренности.	4

ВАРИАНТ 1

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - \dfrac{1}{2} X_3, \\ x_2 = X_2, \\ x_3 = X_3 - \dfrac{1}{2} X_1. \end{cases}.$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = 2X_1^2 X_2 \vec{e}_1 + \left(X_1 + X_2\right)\vec{e}_2 + X_3^2 X_2 \vec{e}_3.$$

Определить относительное перемещение единичного вектора, идущего из точки $Q(1;0;2)$ в точку $R(1;\ 3;\ 6)$.

3. Дано поле скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{2x_1^2}{2-t}\vec{e}_1 + \frac{x_2}{2-t}\vec{e}_2 + \frac{x_3^2}{2-t}\vec{e}_3.$$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;2;2)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 2

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \dfrac{1}{2} X_2 - \dfrac{1}{2} X_3, \\ x_2 = X_2 + \dfrac{1}{2} X_1 - \dfrac{1}{2} X_3,. \\ x_3 = X_3 - \dfrac{1}{2} X_1 - \dfrac{1}{2} X_2. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(2X_1 + X_2\right)\vec{e}_1 + \left(X_1 - X_2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3 + X_2\right)\vec{e}_3 .$$

Определить относительное перемещение $d\overline{u}$ в направлении оси $-X_3$.

3. Для вращения абсолютно твердого тела со скоростью

$$\vec{\mathrm{v}} = 2x_1\vec{e}_1 + 4x_2\vec{e}_2 + \left(x_3 - 3x_1\right)\vec{e}_3 .$$

Определить вектор вихря скорости $2\boldsymbol{\Omega}$. Записать уравнение движения.

ВАРИАНТ 3

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \dfrac{1}{2}X_2, \\ x_2 = X_2 + \dfrac{1}{2}X_3,. \\ x_3 = X_3 + \dfrac{1}{2}X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(2X_1 + X_2\right)\vec{e}_1 + \left(X_1 + X_2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3 + X_2 - X_1\right)\vec{e}_3,$$

определить перемещение точки $Q(1;0;2)$ относительно точки $R(1;\ 0.2;\ 2)$.

3. Дано поле скоростей $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{2x_1}{3+t}\vec{e}_1 + \dfrac{x_2}{3+t}\vec{e}_2 + \dfrac{x_3}{3+t}\vec{e}_3$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент $t=1$ в точке $P(1;2;1)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 4

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 + 4X_3, . \\ x_3 = X_3 + 4X_2. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 2x_1^2\vec{e}_1 + 4x_1 x_2\vec{e}_2 + \left(x_3^2 - 3x_1\right)\vec{e}_3.$$

Определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(1;1;1)$ в направлении $\vec{v} = \left(3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2\right)/5$.

3. Дано поле скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{x_1^2}{4-t}\vec{e}_1 - \frac{x_2^2}{4-t}\vec{e}_2 + \frac{2x_3}{4-t}\vec{e}_3.$$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;0;2)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 5

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2X_3, \\ x_2 = X_2 - 2X_3, \\ x_3 = X_3 - 2X_1 + 2X_2. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(X_1^2 + X_2\right)\vec{e}_1 + \left(X_1^2 + X_2^2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3^2 - X_1\right)\vec{e}_3.$$

Найти изменения длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение) в направлении $\vec{v} = \left(3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right)/7$ в точке P(1; 0;-1)..

3. Для вращения абсолютно твердого тела со скоростью

$$\vec{\mathrm{v}} = \left(2x_1 + x_3\right)\vec{e}_1 + \left(x_2 - 4\right)\vec{e}_2 + \left(x_1 + 2x_3\right)\vec{e}_3.$$

Определить вектор вихря скорости 2$\mathbf{\Omega}$. Записать уравнение движения.

ВАРИАНТ 6

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 3X_2, \\ x_2 = X_2 + 3X_3,. \\ x_3 = X_3 + 3X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 2x_1^2\vec{e}_1 + 4x_1 x_2\vec{e}_2 + \left(x_3^2 - 3x_1\right)\vec{e}_3$$

Найти скорости частицы в точке $Q(2,0,5)$относительно точки $P(1, -2, 3)$

3. Дано поле скоростей $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{3x_1}{3-t}\vec{e}_1 + \dfrac{x_2^2}{3-t}\vec{e}_2 + \dfrac{3x_3}{3-t}\vec{e}_3$.

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке P(1;2;1). Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 7

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - \dfrac{1}{2} X_2, \\ x_2 = X_2 - \dfrac{1}{2} X_1, . \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля скоростей $\vec{\mathrm{v}} = 2x_1^2 x_2 \vec{e}_1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)\vec{e}_2 + x_3^2 x_2 \vec{e}_3$, определить в точке Q(1;-1;2) скорость изменения угла между ортогональными направлениями $\vec{\nu} = \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right)/\sqrt{2}$ и $\vec{\mu} = \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_2\right)/\sqrt{2}$.

3. Дано поле скоростей $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{x_1}{2+3t}\vec{e}_1 + \dfrac{2x_2}{2+3t}\vec{e}_2 + \dfrac{x_3^2}{2+3t}\vec{e}_3$.

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;2;1)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 8

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2 - X_3, \\ x_2 = X_1 + X_2 + 2X_3, \\ x_3 = -X_1 + 2X_2 + X_3. \end{cases} .$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.
Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.
В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.
Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.
Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.
2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(2X_1 + X_2\right)\vec{e}_1 + \left(X_1 - X_2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3 + X_2\right)\vec{e}_3 .$$

Определить относительное перемещение $d\bar{u}$ в направлении оси X_1.

3. Дано поле скоростей $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{x_2^2}{2+3t}\vec{e}_2 + \dfrac{x_3}{2+3t}\vec{e}_3$.

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(0;1;1)$. Записать уравнение движения.

ВАРИАНТ 9

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - 3X_2, \\ x_2 = X_2 + 3X_3,. \\ x_3 = X_3 - 3X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = X_1 X_2 \vec{e}_1 + \left(X_1^2 + X_2^2 \right) \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3 ,$$

определить относительное перемещение единичного вектора, идущего из точки $M_1(1;1;1)$ в точку $M_2(3;\ 3;\ 2)$..

3. Дано поле скоростей $\vec{\text{v}} = \dfrac{2x_1^2}{4+t}\vec{e}_1 + \dfrac{3x_2^2}{4+t}\vec{e}_2 + \dfrac{2x_3^2}{4+t}\vec{e}_3 .$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;2;1)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 10

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 4X_3, \\ x_2 = X_2, \\ x_3 = X_3 + 4X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 4x_1 x_2 \vec{e}_1 + 2x_2^2 \vec{e}_2 + \left(x_3^2 + 2x_2 \right) \vec{e}_3 .$$

Определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(1;0;1)$ в направлении $\vec{\nu} = \left(3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 \right) / 5$.

3. Для вращения абсолютно твердого тела со скоростью

$$\vec{\mathrm{v}} = \left(2x_1 - x_2 \right) \vec{e}_1 + 4x_1 \vec{e}_2 + \left(x_3 - x_1 \right) \vec{e}_3 .$$

Определить вектор вихря скорости 2**Ω**.

Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 11

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - 2X_2, \\ x_2 = 2X_1 + X_2 + 2X_3,. \\ x_3 = -2X_2 + X_3. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(X_1 + 3X_3\right)\vec{e}_1 + 2\left(X_1 + X_2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3 - X_2 - X_1\right)\vec{e}_3,$$

определить перемещение точки $Q(1;3;0)$ относительно точки $R(1; 3; 0.02)$.

3. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 5x_1\vec{e}_1 + 3x_2\vec{e}_2 + \left(x_3^2 + x_2^2\right)\vec{e}_3.$$

Определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(2;1;2)$ в направлении $\vec{k} = \left(3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3\right)/5$. Уравнение траектории движения.

ВАРИАНТ 12

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - 4X_2, \\ x_2 = X_2 - 4X_3,. \\ x_3 = X_3 - 4X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(x_1^2 - x_2\right)\vec{e}_1 + \left(x_2^2 - x_3^2\right)\vec{e}_2 + \left(x_3 + x_1\right)\vec{e}_3 .$$

Найти изменения длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение) в направлении $\vec{v} = \left(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3\right)/7$ в точке $P(0; 2;1)$.

3. Дан закон движения

$x_1=X_1-2X_3\, e^{-t}$, $x_2=X_2-(X_1+X_3)\ e^{-t}$, $x_3=X_3-3X_1\, e^{-t}$

Найти компоненты скорости частицы, находящейся в момент t=1 в точке P(1;2;1) в лагранжевой форме. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 13

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - \dfrac{1}{4} X_3, \\ x_2 = X_2, \\ x_3 = X_3 - \dfrac{1}{4} X_1. \end{cases} .$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \left(3x_1^2 - x_3\right)\vec{e}_1 + \left(4x_1 x_2 - x_2^2\right)\vec{e}_2 + \left(x_3^2 + x_2\right)\vec{e}_3$$

Найти скорости частицы в точке $Q(1,0,-1)$относительно точки $P(1, 2, 2)$ ..

3. Дано поле скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{2x_1^2}{\sqrt{2-t}}\vec{e}_1 + \frac{x_2}{\sqrt{2-t}}\vec{e}_2 + \frac{x_3^2}{\sqrt{2-t}}\vec{e}_3 .$$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;2;1)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 14

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_3 - X_2, \\ x_2 = X_2 + X_3, \\ x_3 = X_3 + X_2. \end{cases} .$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\vec{e}_1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)\vec{e}_2 + x_3^2\vec{e}_3,$$

определить в точке $Q(1;2;0)$ скорость изменения угла между ортогональными направлениями $\vec{\nu} = \left(\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right)/\sqrt{5}$ и $\vec{\mu} = \left(2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)/\sqrt{5}$.

3. Дано поле скоростей $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{x_2^2}{1+t}\vec{e}_2 + \dfrac{x_3^2 + x_1}{1+t}\vec{e}_3$ найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(2;1;1)$. Записать уравнение движения.

ВАРИАНТ 15

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \dfrac{1}{4} X_2, \\ x_2 = X_2 + \dfrac{1}{4} X_3, . \\ x_3 = X_3 + \dfrac{1}{4} X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.
Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.
В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.
Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.
Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.
2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(2X_1 + X_2\right)\vec{e}_1 + \left(X_1 + X_2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3 + X_2 - X_1\right)\vec{e}_3,$$

Найти компоненты вектора скорости.

3. Дано поле скоростей $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{2x_1}{3t}\vec{e}_1 + \dfrac{x_2^2}{3t}\vec{e}_2 + \dfrac{x_3}{3t}\vec{e}_3$

Уравнение линии тока и уравнение движения.

ВАРИАНТ 16

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 - 2X_3,. \\ x_3 = X_3 - 2X_2. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 2x_1^2\vec{e}_1 + \left(x_2^2 - 3x_3\right)\vec{e}_2 + 4x_3x_2\vec{e}_3.$$

Определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(2;1;2)$ в направлении $\vec{\nu} = \left(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_2\right)/3$.

3. Дано поле скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{x_1^2}{\sqrt[3]{4-t}}\vec{e}_1 + \frac{2x_2^2}{\sqrt[3]{4-t}}\vec{e}_2 + \frac{2x_3}{\sqrt[3]{4-t}}\vec{e}_3.$$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=3 в точке $P(2;1;1)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 17

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_3, \\ x_2 = X_2 - X_1, \\ x_3 = X_3 - X_2 - X_1. \end{cases} .$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(X_1^2 + X_2\right)\vec{e}_1 + \left(X_1^2 + X_2^2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3^2 - X_1\right)\vec{e}_3 .$$

Найти изменения длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение) в направлении $\vec{v} = \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right)/3$

в точке $P(1;\ 1;\ 2)$..

3. Для вращения абсолютно твердого тела со скоростью

$$\vec{\mathrm{v}} = \left(2x_1 + x_3\right)\vec{e}_1 + \left(x_2 - 4x_1\right)\vec{e}_2 + \left(x_1 + 2x_3\right)\vec{e}_3 .$$

Определить вектор вихря скорости $2\mathbf{\Omega}$. Записать уравнение движения.

ВАРИАНТ 18

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - 2X_2, \\ x_2 = X_2 - 2X_3,. \\ x_3 = X_3 - 2X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 2\left(x_1^2 - x_3\right)\vec{e}_1 + 4x_1 x_2^2 \vec{e}_2 + x_3^2 \vec{e}_3$$

Найти скорости частицы в точке $Q(2,0,5)$относительно точки $P(1, -2, 3)$

3. Дано поле скоростей $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{4x_1}{4+t^2}\vec{e}_1 + \dfrac{x_2^2}{4+t^2}\vec{e}_2 + \dfrac{2x_3}{4+t^2}\vec{e}_3$.

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;2;2)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 19

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + X_2 - X_3, \\ x_2 = X_2 - X_1, \\ x_3 = X_3 + X_2. \end{cases}.$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 2x_1^2 x_2 \vec{e}_1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)\vec{e}_2 + x_3^2 x_2 \vec{e}_3,$$

определить в точке $Q(1;-1;2)$ скорость изменения угла между ортогональными направлениями $\vec{\nu} = \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right)/\sqrt{3}$ и $\vec{\mu} = \left(\vec{e}_1 - \vec{e}_3\right)/\sqrt{3}$.

3. Дано поле скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{x_1^2}{3+2t}\vec{e}_1 + \frac{2x_2}{3+2t}\vec{e}_2 + \frac{x_3^2}{3+2t}\vec{e}_3.$$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;2;1)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 20

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - X_2 - X_3, \\ x_2 = X_2 - X_3, \\ x_3 = X_1 + X_2 + X_3. \end{cases}.$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(2X_1 - X_2\right)\vec{e}_1 + \left(X_1 + 2X_2\right)\vec{e}_2 + \left(2X_3 + X_1\right)\vec{e}_3.$$

Определить относительное перемещение $d\overline{u}$ в направлении оси $-X_1$.

3. Дано поле скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{x_1^2}{2+3t}\vec{e}_1 + \frac{x_3^2}{2+3t}\vec{e}_3.$$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке P(1;1;1). Записать уравнение движения.

ВАРИАНТ 21

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - X_2, \\ x_2 = X_2 + X_3,. \\ x_3 = X_3 - X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = X_1 X_3 \vec{e}_1 + \left(X_1^2 + X_2^2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3^2 + X_1^2\right)\vec{e}_3,$$

определить относительное перемещение единичного вектора, идущего

из точки $M_1(1;1;1)$ в точку $M_2(3; 2; 2)$..

3. Дано поле скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{2x_1^2}{4-3t}\vec{e}_1 + \frac{3x_2^2}{4-3t}\vec{e}_2 + \frac{2x_3^2}{4-3t}\vec{e}_3.$$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;2;1)$. Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 22

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1, \\ x_2 = X_2 - 3X_3,. \\ x_3 = X_3 - 3X_2. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 4x_1 x_2 \vec{e}_1 + 2x_2^2 \vec{e}_2 + \left(x_3^2 + 2x_2 \right) \vec{e}_3 .$$

Определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(1;0;1)$ в направлении $\vec{v} = \left(2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \right) / 6$.

3. Для вращения абсолютно твердого тела со скоростью

$$\vec{\mathrm{v}} = \left(2x_1 - x_2 \right) \vec{e}_1 + 4x_2 \vec{e}_2 + \left(2x_3 - x_1 \right) \vec{e}_3 .$$

Определить вектор вихря скорости 2**Ω**.

Уравнение линии тока.

ВАРИАНТ 23

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2X_2, \\ x_2 = X_2 + 2X_1, \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(X_1 + 3X_3\right)\vec{e}_1 + 2\left(X_1 + X_2\right)\vec{e}_2 + \left(2X_3 - X_2 + X_1\right)\vec{e}_3,$$

определить перемещение точки $Q(1;3;0)$ относительно точки $R(1; 3; 2)$.

3. Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = 5x_1\vec{e}_1 + 3x_2\vec{e}_2 + \left(x_3^2 + x_2^2\right)\vec{e}_3 .$$

Определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(2;1;2)$ в направлении $\vec{k} = \left(4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3\right)/6$. Уравнение траектории движения.

ВАРИАНТ 24

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + 2X_2, \\ x_2 = X_2 + 2X_3, . \\ x_3 = X_3 + 2X_1. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты. Построить круги Мора.

В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

2. Для поля перемещений

$$\vec{u} = \left(x_1^2 - x_2\right)\vec{e}_1 + \left(x_2^2 - x_3^2\right)\vec{e}_2 + \left(x_3 + x_1\right)\vec{e}_3 .$$

Найти изменения длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение) в направлении $\vec{v} = \left(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3\right)/7$ в точке $P(0; 2;1)$.

3. Дан закон движения

$x_1 = X_1 - 2X_3\, e^{-t}$, $x_2 = X_2 - (X_1 + X_3)\, e^{-t}$, $x_3 = X_3 - 3X_1\, e^{-t}$

Найти компоненты скорости частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;2;1)$ в лагранжевой форме. Уравнение линии тока.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ЗАДАЧА 1.

1. Для совмещенных материальных и пространственных осей, задано поле перемещений сплошной среды

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \dfrac{1}{2}X_3, \\ x_2 = X_2 - \dfrac{1}{2}X_3, \\ x_3 = X_3 - \dfrac{1}{2}X_1 + \dfrac{1}{2}X_2. \end{cases}$$

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.
Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.
В). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.
Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.
Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

А). Определить компоненты вектора перемещения в материальной и пространственной форме.
Решение.
Выразим компоненты вектора перемещения, используя формулу для совмещенных материальных и пространственных осей, т.е.

вычтем из конечного положения частицы заданной координатами $x_1 = X_1 + \frac{1}{2}X_3,\ x_2 = X_2 - \frac{1}{2}X_3,\ x_3 = X_3 - \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ координаты начального положения X_1, X_2, X_3 получаем

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1, \\ u_2 = x_2 - X_2, \\ u_3 = x_3 - X_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}X_3, \\ u_2 = -\frac{1}{2}X_3, \\ u_3 = -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2. \end{cases}$$

Для того чтобы получить компоненты перемещения в пространственных координатах, необходимо обратить исходную систему координат, для чего воспользуемся формулами Крамера для поиска X_1, X_2, X_3.

Имеем исходный основной определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2},$$

И три дополнительных определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1/2 \\ x_2 & 1 & -1/2 \\ x_3 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{4}x_1 = \frac{5x_1 + x_2 - 2x_3}{4},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1/2 \\ 0 & x_2 & -1/2 \\ -1/2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = x_2 + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{x_1 + 5x_2 + 2x_3}{4},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1/2 & 1/2 & x_3 \end{vmatrix} = x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{2x_3 + x_1 - x_2}{2}.$$

В результате имеем

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5x_1 + x_2 - 2x_3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5x_1 + x_2 - 2x_3}{6},$$

$$X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x_1 + 5x_2 + 2x_3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{x_1 + 5x_2 + 2x_3}{6},$$

$$X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{2x_3 + x_1 - x_2}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{x_1 - x_2 + 2x_3}{3}.$$

Используем снова формулу для перемещения, подставив в него полученные координаты начального положения

$$\begin{cases} u_1 = x_1 - X_1, \\ u_2 = x_2 - X_2, \\ u_3 = x_3 - X_3, \end{cases} \begin{cases} u_1 = x_1 - \dfrac{5x_1 + x_2 - 2x_3}{6} = \dfrac{x_1 - x_2 + 2x_3}{6}, \\ u_2 = x_2 - \dfrac{x_1 + 5x_2 + 2x_3}{6} = \dfrac{-x_1 + x_2 - 2x_3}{6}, \\ u_3 = x_3 - \dfrac{x_1 - x_2 + 2x_3}{3} = \dfrac{-x_1 + x_2 + x_3}{3}, \end{cases}$$

Полученные координаты вектора перемещения выражены через пространственные координаты.

Б). Определить компоненты лагранжевого тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Решение.

Для нахождения лагранжевого тензора конечных деформаций воспользуемся формулой [4]

$$L_G = \frac{1}{2}\left(J + J^T + J^T J\right)$$

$$L_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right) \text{ (по } k \text{ суммирование).}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} X_3, \\ u_2 = -\frac{1}{2} X_3, \\ u_3 = -\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2. \end{cases}$$

Вычислим тензор материальный тензор перемещения $J = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right\}$

$$J = \bar{u}\nabla_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J \cdot J^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$L_G = \frac{1}{2}\left(J + J^T + J^T J\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

В результате деформация проявляется в относительном удлинения $l_{11} = l_{22} = \frac{1}{8}$ вдоль осей x_1 и x_2 и $l_{33} = \frac{1}{4}$ вдоль оси x_3.

Также происходит изменение ортогональных углов вдоль осей x_1 и x_2 на величину $l_{12} = -\frac{1}{8}$ или $\frac{1}{2}\gamma_{12} = -\frac{1}{8}$

Найдем главные значения, для чего составим определитель и используем разложение по третьей строке

$$\begin{vmatrix} 1/8-l & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1/8-l & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-l \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}-l\right)\left[\left(\frac{1}{8}-l\right)\left(\frac{1}{8}-l\right)-\frac{1}{64}\right]=0,$$

Получаем

$$l_1 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{8}-l\right)^2 = \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{1}{8}-l = \pm\frac{1}{8} \Rightarrow l_2 = 0,\ l_3 = \frac{1}{4}$$

Получаем лагранжевый тензор конечных деформаций в главных осях

$$L_G^* = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Одно из главных деформаций равно нулю, а значит, в материальных главных осях, имеет место плоское деформационное состояние.

Найдем главные направления, в которых лагранжевый тензор конечных деформаций принимает найденный диагональный вид. Составим систему уравнений для нахождения вектора $\overline{n}^{(1)}$ указывающего направление с учетом главного значения $l_1 = \frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} 1/8-l & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1/8-l & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}=0$$

Или после подстановки l

$$\begin{pmatrix} -1/8 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} -1/8n_1-1/8n_2=0, \\ -1/8n_1-1/8n_2=0, \\ n_3=0, \end{cases}$$

Можно также использовать условие единичности искомого вектора $(n_1)^2+(n_2)^2+(n_3)^2=1$.

В данном случае получаем $n_1=-n_2$, пусть $n_1=1$, тогда $n_2=-1$.

Нормируя вектор $\overline{n}^{(1)}=(1,-1,0)$, получаем $\overline{n}^{(1)}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

(разделили координаты на длину вектора).

Решаем аналогичную задачу для $l_3=0$ (т.к. главные значения были пронумерованы произвольно, то и искомые вектора можно нумеровать в произвольном порядке)

$$\begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}=0, \quad \begin{cases} 1/8n_1-1/8n_2=0, \\ -1/8n_1+1/8n_2=0, \\ 1/4n_3=0, \end{cases}$$

Получаем $n_3=0$, $n_1=n_2$, пусть $n_1=n_2=1$.

Нормируя вектор $\overline{n}^{(2)}=(1,-1,0)$, получаем $\overline{n}^{(2)}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

Т.к. искомые направления должны быть ортогональны, проверим, чтобы произведения $\overline{n}^{(1)}\overline{n}^{(2)}=0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0=0.$$

Третий вектор должен образовывать ортогонанальную тройку с векторами $\bar{n}^{(1)}\bar{n}^{(2)}$, чтобы получит правую тройку векторов воспользуемся векторным произведение

$$\bar{n}^{(3)} = \bar{n}^{(1)} \times \bar{n}^{(2)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\,(0) - \bar{j}\,(0) + \bar{k}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (0,\ 0{,}1).$$

Главные направления задают матрицу преобразований для перехода от исходной системы координат к системе координат в которой тензор конечных деформаций Лагранжа принимает найденный диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и выполняется соотношение $L_G^* = A \cdot L_G \cdot A^T$.

Для поиска инвариантов воспользуемся формулами записанными в главных осях

$$I_L = l_1 + l_2 + l_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2},$$

$$II_L = l_1 l_2 + l_2 l_3 + l_3 l_1 = \frac{1}{16},$$

$$III_L = l_1 l_2 l_3 = 0.$$

Значение первого инварианта указывает, что изменение объема на единицу первоначального объема называемое коэффициентом кубического расширения не равно нулю

$$D_0 = \frac{V - V_0}{V_0} = l_1 + l_2 + l_3 = \frac{1}{2}.$$

B). Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций (описать физический смысл компонент полученного тензора). Найти его главные значения и главные направления и инварианты.

Очевидно, что решать данную задачу можно также как предыдущую, но попробуем применить альтернативные методы Определить компоненты эйлерова тензора конечных деформаций используя формулу $E_A = \frac{1}{2}\left(I - H^T H\right)$ [3]

Используем вектор перемещения записанный в пространственной системе координат найденный ранее

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{x_1 - x_2 + 2x_3}{6}, \\ u_2 = \dfrac{-x_1 + x_2 - 2x_3}{6}, \\ u_3 = \dfrac{-x_1 + x_2 + x_3}{3}, \end{cases}$$

и найдем пространственный тензор перемещения $K = \left\{\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\}$ -

$$K = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

эйлеровый тензор конечных деформаций (или тензором конечных деформаций Альманси) вычислим по формуле

$$E_A = \frac{1}{2}\left(K + K^T - K^T K\right), [2]$$

$$E_A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \text{ (по } k \text{ суммирование).}$$

$$K^T K = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Разделим на 6 и подставим в формулу

$$E_A = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

Получаем

$$E_A = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 2/12 \end{pmatrix}$$

Найдем теперь инварианты тензора

$$I_E = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{1}{3},$$

$$II_E = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{31}^2 =$$

$$= \frac{1}{144} + \frac{2}{144} + \frac{2}{144} - \frac{1}{144} - 0 - 0 = \frac{4}{144} = \frac{1}{36},$$

$$III_E = \det\left\{\varepsilon_{ij}\right\} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} = \frac{2}{12}\left(\frac{1}{144} - \frac{1}{144}\right) = 0\,.$$

Зная инварианты, составим характеристическое уравнение

$$\varepsilon^3 - I_E\varepsilon^2 + II_E\varepsilon - III_E = 0$$

$$\varepsilon^3 - \frac{1}{3}\varepsilon^2 + \frac{1}{36}\varepsilon = 0$$

Решая уравнение получаем

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \text{и} \quad 36\varepsilon^2 - 12\varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \left(6\varepsilon - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow \varepsilon_{2,3} = \frac{1}{6}$$

Получаем, что эйлеровый тензор конечных деформаций в главных осях имеет вид

$$E_A^* = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Одно из главных деформаций равно нулю, а значит, в пространственных главных осях, имеет место плоское деформационное состояние, а значит одно из главных направлений задается вектором $\bar{n}^{(3)} = \left(0,0,1\right)$, т.е. преобразование системы координат происходит только в плоскости x_1x_2 за счет поворота вокруг оси x_3.

Найдем оставшиеся главные направления $\bar{n}^{(1)}$ и $\bar{n}^{(2)}$ для чего составим систему уравнений используя тензор

$$E_A = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 2/12 \end{pmatrix}$$

получаем

$$\begin{pmatrix} 1/12-\varepsilon & -1/12 & 0 \\ -1/12 & 1/12-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2/12-\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}=0$$

или после подстановки $\varepsilon=\dfrac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} -1/12 & -1/12 & 0 \\ -1/12 & -1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} -1/12n_1-1/12n_2=0, \\ -1/12n_1-1/12n_2=0, \\ n_3=0, \end{cases}$$

Решая систему, находим $\bar{n}^{(1)}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$. Для вычисления вектора $\bar{n}^{(2)}$ используем условие ортогональности, а также то, что искомый вектор находится в плоскости x_1x_2 получаем $\bar{n}^{(2)}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ и матрица перехода имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Г). Разложить вектор относительного перемещения в материальной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.

Представим величину вектора относительного перемещения в виде разложения на симметричный и антисимметричный тензора [3]

$$d\bar{u}=J\cdot d\bar{X}=\left(\frac{1}{2}\left(J+J^T\right)+\frac{1}{2}\left(J-J^T\right)\right)d\bar{X}\ .$$

Подобное разложение допустимо в предположении, что рассматриваемые деформации малы.
Найдем симметричный тензор используя ранее найденные

тензор $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ и $J^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}\left(J + J^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L$$

В теории малых деформаций симметричный тензор $L = \left\{l_{ij}\right\}$ есть лагранжевый тензор линейных деформаций, т.е. линейный тензор деформаций в материальных координатах равен нулю
Найдем антисимметричный тензора

$$\frac{1}{2}\left(J - J^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = W$$

Антисимметричный тензор называется лагранжевым тензором линейного поворота.
Т. е. если считать, что данная задача решается в теории малых деформаций, то заданные уравнения описывают поворот абсолютно твердого тела (удлинения вдоль осей и изменения углов отсутствуют) и тело, не меняя своих размеров просто поворачивается.

Д). Разложить вектор относительного перемещения в пространственной форме на симметричную и антисимметричную части, пояснить полученный результат.
При рассмотрении деформации в эйлеровых координатах

$$d\overline{u} = K \cdot d\overline{x} = \left(\frac{1}{2}\left(K + K^T\right) + \frac{1}{2}\left(K - K^T\right)\right)d\overline{x}\ .$$

Симметричный тензор $E = \left\{ \varepsilon_{ij} \right\} = \dfrac{1}{2}\left(K + K^T \right)$ есть эйлеровый тензор линейных деформаций,

$$E = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Антисимметричный тензор $\Omega = \left\{ \omega_{ij} \right\} = \dfrac{1}{2}\left(K - K^T \right)$ называется эйлеровым тензором линейного поворота

$$\Omega = \frac{1}{2}\frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом при рассмотрении заданной задачи в пространственной системе координат имеем, что в результате деформации произошло изменение линейных размеров тела вдоль всех осей, а также изменение углов в плоскости x_1x_2.
При этом также наблюдается поворот тела относительно направлений x_1x_3 и x_2x_3.

Т.к. тензоры линейных деформаций оказались не равны $L \neq E$ то представленные уравнения движения не описывают малые перемещения.
Если малы не только градиенты перемещений, но и сами перемещения то $L = E$.

ЗАДАЧА 2.

Задача 2.1
Для поля перемещений
$\vec{u} = 2\left(X_1^2 + X_2\right)\vec{e}_1 + 2\left(X_1^2 + X_2^2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3^2 + X_2\right)\vec{e}_3$.

A) Определить относительное перемещение единичного вектора, идущего из точки $Q(1;2;2)$ в точку $R(1;\ 4;\ 6)$.
B) Определить относительное перемещение $d\bar{u}$ в точке $Q(1;2;2)$ в направлении оси $-X_1$.
C) Найти изменения длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение) в направлении $\vec{v} = \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right)/3$ в точке $Q(1;2;2)$.

Решение.
A) Определить относительное перемещение единичного вектора, идущего из точки *Q*(1;2;2) в точку *R*(1; 4; 6).

Найдем единичный вектор $\overrightarrow{QR} = \left(1-1,\quad 4-2,\quad 6-2\right) = \left(0, 2, 4\right)$

Длина вектора $\left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Нормированный вектор имеет вид $\overrightarrow{QR} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

$$\frac{d\bar{u}}{\left|dX\right|} = \bar{u} \cdot \nabla_{\bar{X}} \cdot \overline{QR} = J \cdot \overline{QR}.$$

$$J = \bar{u}\nabla_X = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4X_1 & 2 & 0 \\ 4X_1 & 4X_2 & 0 \\ 0 & 1 & 4X_3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим материальный тензор перемещения в точке $Q(1;2;2)$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d\bar{u}}{|dX|} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 8/\sqrt{5} \\ 17/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

В) Для поля перемещений
$\vec{u} = 2\left(X_1^2 + X_2\right)\vec{e}_1 + 2\left(X_1^2 + X_2^2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3^2 + X_2\right)\vec{e}_3$**,**
определить относительное перемещение $d\bar{u}$ **в точке** $\boldsymbol{Q}$**(1;2;2) в направлении оси –**$\boldsymbol{X_1}$**.**

Решение.

$$d\bar{u} = J \cdot \bar{\text{v}}$$

материальный тензор перемещения в точке Q был найден в задании **А**. Вектор $\bar{\text{v}}$ это единичный вектор направленный вдоль оси $-X_1$ и равен $\bar{\text{v}} = (-1, 0, 0)$.

Вычислим относительное перемещение

$$d\bar{u} = J \cdot \bar{\text{v}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С) **Для поля перемещений**
$\vec{u} = 2\left(X_1^2 + X_2\right)\vec{e}_1 + 2\left(X_1^2 + X_2^2\right)\vec{e}_2 + \left(X_3^2 + X_2\right)\vec{e}_3$**.**

Найти изменения длины, приходящееся на единицу начальной длины (относительное удлинение) в направлении $\vec{v} = \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right)/3$ **в точке** $\boldsymbol{Q}$**(1;2;2).**

Решение

Коэффициент относительного удлинения линейного элемента в заданном вектором $\vec{\nu}$ направлении рассчитывается в виде

$$\frac{|dx|-|dX|}{|dX|}=\bar{\nu}\cdot L\cdot\bar{\nu}, \text{ [4]}$$

Найдем тензор деформации $L=\frac{1}{2}\left(J+J^T\right)$, $l_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$

Воспользуемся материальным тензором перемещения в точке $Q(1;2;2)$ найденным в задании **А)** и найдем лагранжевый тензор деформации

$$L=\frac{1}{2}\left(J+J^T\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}4&2&0\\4&8&0\\0&1&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&4&0\\2&8&1\\0&0&8\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}4&3&0\\3&8&1/2\\0&1/2&8\end{pmatrix}$$

Подставим

$$\frac{|dx|-|dX|}{|dX|}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&3&0\\3&8&1/2\\0&1/2&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\frac{84}{9}=\frac{28}{3}.$$

Замечание. При вычислении изменения длины, приходящейся на единицу начальной длины (относительное удлинение) в заданном направлении в <u>пространственных координатах</u> $\left(x_1,x_2,x_3\right)$ используется аналогичная формула

$$\frac{|dx|-|dX|}{|dX|}=\bar{\nu}\cdot E\cdot\bar{\nu}, \text{ где } E=\frac{1}{2}\left(K+K^T\right),\ \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

тензор деформации Эйлера.

Задача 2.2

Для стационарного поля скоростей

$$\vec{\nu}=\left(2x_1^2-x_2^2\right)\vec{e}_1+4\left(x_1x_2+x_2^2\right)\vec{e}_2+\left(x_3^2+x_1^2\right)\vec{e}_3.$$

A) Определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(2;0;1)$ в направлении $\vec{\nu} = \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right)/3$.

B) Найти скорости частицы в точке $Q(2,1,2)$относительно точки $P(1, 2, 3)$

C) определить в точке $Q(2;1;2)$ скорость изменения угла между ортогональными направлениями $\vec{\nu} = \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right)/3$ и $\vec{\mu} = \left(-4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\right)/3\sqrt{2}$

A) Определить скорость удлинения материального отрезка в точке $P(2;0;1)$ в направлении $\vec{\nu} = \left(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right)/3$, для стационарного поля скоростей

$\vec{\mathrm{v}} = \left(2x_1^2 - x_2^2\right)\vec{e}_1 + 4\left(x_1 x_2 + x_2^2\right)\vec{e}_2 + \left(x_3^2 + x_1^2\right)\vec{e}_3$.

Решение.

Скорость удлинения в направлении единичного вектора $\bar{\nu}$ равна

$$d = d_i^{(\bar{\mathrm{v}})}\nu_i = D_{ij}\nu_j\nu_i, \text{ или } d = \bar{\nu}\cdot D\cdot\bar{\nu}.$$

Для удобства найдем пространственный градиент мгновенного поля скорости, тензор градиента скорости и используем формулу $D = \dfrac{1}{2}\left(Y + Y^T\right)$, или $D_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}\right)$

$$Y \equiv \left\{\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_j}\right\} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 4x_1 & -2x_2 & 0 \\ 4x_2 & 4\left(x_1 + 2x_2\right) & 0 \\ 2x_1 & 0 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

Подставим точку $P(2;0;1)$

$$Y=\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Найден тензор скорости деформации

$$D=\frac{1}{2}\left(Y+Y^T\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 0 & 4\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ 0 & 8 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$d=\bar{v}\cdot D\cdot\bar{v}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ 0 & 8 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}=\frac{56}{9}$$

В) Найти скорости частицы в точке *Q*(2,1,2) относительно точки *P*(1, 2, 3)

Решение.

Найдем скорости в заданных точках

$$\vec{\mathrm{v}}=\left(2x_1^2-x_2^2\right)\vec{e}_1+4\left(x_1x_2+x_2^2\right)\vec{e}_2+\left(x_3^2+x_1^2\right)\vec{e}_3.$$

$$\mathrm{v}_Q=7\vec{e}_1+12\vec{e}_2+8\vec{e}_3$$

$$\vec{\mathrm{v}}_P=\left(-2\right)\vec{e}_1+24\vec{e}_2+10\vec{e}_3$$

$$\vec{\mathrm{v}}_P-\vec{\mathrm{v}}_Q=\left(-2\right)\vec{e}_1+24\vec{e}_2+10\vec{e}_3-\left(7\vec{e}_1+12\vec{e}_2+8\vec{e}_3\right)$$

$$\vec{\mathrm{v}}_P-\vec{\mathrm{v}}_Q=\left(-9\right)\vec{e}_1+12\vec{e}_2+2\vec{e}_3.$$

С) Для стационарного поля скоростей $\vec{\mathrm{v}}=\left(2x_1^2-x_2^2\right)\vec{e}_1+4\left(x_1x_2+x_2^2\right)\vec{e}_2+\left(x_3^2+x_1^2\right)\vec{e}_3$, определить в точке *Q*(2;1;2) скорость изменения угла между ортогональными направлениями $\vec{v}=\left(\vec{e}_1+2\vec{e}_2+2\vec{e}_3\right)/3$ и $\vec{\mu}=\left(-4\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)/3\sqrt{2}$

Решение.

скорость изменения угла между ортогональными направлениями рассчитывается по формуле $\dot{\gamma}_{\mu\nu} = \bar{\mu} \cdot 2D \cdot \bar{\nu}$, где $2D = \left(Y + Y^T\right)$ тензор скорости деформации

воспользуемся тензором скорости деформации найденным в задаче А)

$$2D = \left(Y + Y^T\right) = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Получаем

$$\dot{\gamma}_{\mu\nu} = \bar{\mu} \cdot 2D \cdot \bar{\nu} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-52}{9\sqrt{2}}.$$

ЗАДАЧА 3.

Задача 3.1. Дано поле скоростей

$$\vec{v} = \frac{2x_1^2}{\left(t+1\right)^3}\vec{e}_1 + \frac{4+x_2}{\left(t+1\right)^3}\vec{e}_2 + \frac{x_3^2}{\left(t+1\right)^3}\vec{e}_3$$

A) Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке P(1;1;1).
B) Уравнения линий тока.
C) Уравнения движения.
D) Определить вектор вихря скорости 2**Ω** в момент времени t=1.

Решение.

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial t} + \left(\mathrm{v}_1 \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2} + \mathrm{v}_3 \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_3} \right), \\ a_2 = \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial t} + \left(\mathrm{v}_1 \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} + \mathrm{v}_3 \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_3} \right), \\ a_3 = \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial t} + \left(\mathrm{v}_1 \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_2} + \mathrm{v}_3 \dfrac{\partial \mathrm{v}_3}{\partial x_3} \right). \end{cases}$$

компоненты ускорения в пространственных координатах.

$$\begin{cases} a_1 = -3\dfrac{2x_1^2}{(t+1)^4} + \left(\dfrac{2x_1^2}{(t+1)^3} \dfrac{4x_1}{(t+1)^3} \right), \\ a_2 = -3\dfrac{4+x_2}{(t+1)^4} + \left(\dfrac{4+x_2}{(t+1)^3} \dfrac{1}{(t+1)^3} \right), \\ a_3 = -3\dfrac{x_3^2}{(t+1)^4} + \left(\dfrac{x_3^2}{(t+1)^3} \dfrac{2x_3}{(t+1)^3} \right). \end{cases}$$

Найти компоненты ускорения частицы, находящейся в момент t=1 в точке P(1;1;1).

$$\bar{a} = -\frac{1}{4}\bar{e}_1 - \frac{55}{64}\bar{e}_2 - \frac{5}{32}\bar{e}_3.$$

В) Уравнения линий тока

Линией тока для поля скоростей в некоторый момент времени называется кривая, касательная к которой в любой точке совпадает по направлению со скоростью в этой точке. Уравнение линии тока имеет вид [3]

$$\frac{dx_1}{\mathrm{v}_1} = \frac{dx_2}{\mathrm{v}_2} = \frac{dx_3}{\mathrm{v}_3}$$

Подставляя получим $\vec{\mathrm{v}} = \frac{2x_1^2}{(t+1)^3}\vec{e}_1 + \frac{4+x_2}{(t+1)^3}\vec{e}_2 + \frac{x_3^2}{(t+1)^3}\vec{e}_3$

$$\frac{dx_1}{\frac{2x_1^2}{(t+1)^3}} = \frac{dx_2}{\frac{4+x_2}{(t+1)^3}} = \frac{dx_3}{\frac{x_3^2}{(t+1)^3}}$$

Или

$$\frac{dx_1}{2x_1^2} = \frac{dx_2}{4+x_2} = \frac{dx_3}{x_3^2}$$

Решая дифференциальные уравнения получим

$$\frac{dx_1}{2x_1^2} = \frac{dx_2}{4+x_2} \Rightarrow \frac{-1}{2x_1} + c_1 = \ln\left(4+x_2\right) \Rightarrow \frac{-1}{x_1} + c_1 = 2\ln\left(4+x_2\right),$$

$$\frac{dx_2}{4+x_2} = \frac{dx_3}{x_3^2} \Rightarrow \ln\left(4+x_2\right) = \frac{-1}{x_3} + c_2$$

$$\frac{dx_1}{2x_1^2} = \frac{dx_3}{x_3^2} \Rightarrow \frac{-1}{2x_1} = \frac{-1}{x_3} \Rightarrow 2x_1 + c_3 = x_3$$

Используем начальные условия при t=0, $x_i = X_i$ /

$$c_1 = 2\ln\left(4+X_2\right) - \frac{1}{X_1},\ c_2 = \ln\left(4+X_2\right) + \frac{1}{X_3},\ c_3 = x_3 - 2x_1 .$$

Уравнения линий тока имеют вид

$$\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{X_1} - 2\ln\left(\frac{4+x_2}{4+X_2}\right),\ \frac{1}{x_3} = \frac{1}{X_3} - \ln\left(\frac{4+x_2}{4+X_2}\right),$$

$$x_3 = 2x_1 + X_3 - 2X_1 .$$

С) Уравнения движения.

Рассмотрим выражения для скорости $\mathrm{v}_i = \frac{dx_i}{dt}$, и

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{2x_1^2}{(t+1)^3},\quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{4+x_2}{(t+1)^3},\quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{x_3^2}{(t+1)^3} .$$

Проинтегрируем

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{(t+1)^2} + c_1, \quad \ln\left|4 + x_2\right| = \frac{1}{-2(t+1)^2} + c_2, \quad \frac{1}{x_3} = \frac{1}{2(t+1)^2} + c_3.$$

Используем начальные условия при t=0, $x_i = X_i$

$$\frac{1}{X_1} - 1 = c_1, \quad \ln\left|4 + X_2\right| + \frac{1}{2} = c_2, \quad \frac{1}{X_3} - \frac{1}{2} = c_3.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{X_1} = \frac{1}{(t+1)^2} - 1,$$

$$-2\ln\left|\frac{4 + x_2}{4 + X_2}\right| = \frac{1}{(t+1)^2} - 1,$$

$$\frac{2}{x_3} - \frac{2}{X_3} = \frac{1}{(t+1)^2} - 1.$$

Если исключить из полученных уравнений время

$$\frac{1}{x_1} - \frac{1}{X_1} = -2\ln\left|\frac{4 + x_2}{4 + X_2}\right| = \frac{2}{x_3} - \frac{2}{X_3}$$

То получим уравнения линий тока

Задача 3.2. Дано поле скоростей

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{2x_1^2 + x_2}{(t+1)^3}\vec{e}_1 + \frac{4x_2}{(t+1)^3}\vec{e}_2 + \frac{x_2 x_3^2}{(t+1)^3}\vec{e}_3$$

Определить вектор вихря скорости 2Ω в момент времени t=1.

Решение.

Используем формулу для нахождения вектора вихря скорости [2]

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2}\bar{q} = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}} \times \bar{\mathrm{v}}$$

При t=1 имеем $\vec{\mathrm{v}} = \frac{2x_1^2 + x_2}{8}\vec{e}_1 + \frac{4 + x_2}{8}\vec{e}_2 + \frac{x_2 x_3^2}{8}\vec{e}_3$

$$2\bar{\Omega}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ \dfrac{2x_1^2+x_2}{8} & \dfrac{4+x_2}{8} & \dfrac{x_2x_3^2}{8}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\Big(\bar{i}\left(x_3^2-0\right)-\bar{j}\left(0-0\right)+\bar{k}\left(0-1\right)\Big)=\frac{1}{8}\left(x_3^2\bar{i}-\bar{k}\right)$$

Задача 3.3. Дан закон движения
$x_1=(X_1-2X_3)\,e^{-t}$, $x_2=(X_2-X_1+X_3)\;e^{-t}$, $x_3=(X_3-3X_1)\,e^{-t}$
Найти компоненты скорости частицы, находящейся в момент
t=1 в точке P(1;1;1) в лагранжевой форме.
Решение.
Для перемещения выраженного в лагранжевых переменных имеем

$$\bar{\mathrm{v}}=\dot{\bar{u}}=\frac{d\bar{u}\left(\bar{X},t\right)}{dt}=\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}.$$

получаем

$$\mathrm{v}_1=\frac{dx_1}{dt}=\left(2X_3-X_1\right)e^{-t},$$

$$\mathrm{v}_2=\frac{dx_2}{dt}=\left(X_1-X_2-X_3\right)e^{-t},$$

$$\mathrm{v}_3=\frac{dx_3}{dt}=\left(3X_1-X_3\right)e^{-t}.$$

Задача 3.4. Дан закон движения
$X_1=x_1-2x_3\,t^2$, $X_2=x_2-(x_1+x_3)\;t^2$, $X_3=x_3-3x_1\,t^2$
Найти компоненты скорости частицы, находящейся в момент
t=1 в точке P(1;1;1) в пространственной форме.
Решение.

$$\begin{cases} \mathrm{v}_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\mathrm{v}_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \mathrm{v}_3 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), \\ \mathrm{v}_2 = \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \left(\mathrm{v}_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mathrm{v}_3 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \\ \mathrm{v}_3 = \dfrac{\partial u_3}{\partial t} + \left(\mathrm{v}_1 \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \mathrm{v}_3 \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \right). \end{cases}$$

Найдем компоненты вектора перемещения $u_i = x_i - X_i$

$u_1 = 2x_3 t^2$, $u_2 = (x_1 + x_3)t^2$, $u_3 = 3x_1 t^2$.

подставляем

$$\begin{cases} \mathrm{v}_1 = 4x_3 t + \left(\mathrm{v}_1 0 + \mathrm{v}_2 0 + \mathrm{v}_3 2t^2 \right), \\ \mathrm{v}_2 = 2\left(x_1 + x_3 \right) t + \left(\mathrm{v}_1 t^2 + \mathrm{v}_2 0 + \mathrm{v}_3 t^2 \right), \\ \mathrm{v}_3 = 6x_1 t + \left(\mathrm{v}_1 3t^2 + \mathrm{v}_2 0 + \mathrm{v}_3 0 \right). \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} \mathrm{v}_1 = 4x_3 t + \mathrm{v}_3 2t^2, \\ \mathrm{v}_2 = 2\left(x_1 + x_3 \right) t + \mathrm{v}_1 t^2 + \mathrm{v}_3 t^2, \\ \mathrm{v}_3 = 6x_1 t + \mathrm{v}_1 3t^2. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_3 2t^2 = 4x_3 t, \\ -\mathrm{v}_1 t^2 + \mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_3 t^2 = 2\left(x_1 + x_3 \right) t, \\ -\mathrm{v}_1 3t^2 + \mathrm{v}_3 = 6x_1 t. \end{cases}$$

Для выражения компонент скорости, можно воспользоваться методом Крамера или подстановкой, находим

$$\begin{cases} \text{v}_1 = \dfrac{4x_3t - 12x_1t^3}{6t^4 - 1}, \\ \text{v}_2 = 2\left(x_1 + x_3\right)t + \left(\dfrac{4x_3t - 12x_1t^3}{6t^4 - 1} + \dfrac{6x_1t - 12x_3t^3}{6t^4 - 1}\right)t^2, \\ \text{v}_3 = \dfrac{6x_1t - 12x_3t^3}{6t^4 - 1}. \end{cases}$$

Найти компоненты скорости частицы, находящейся в момент t=1 в точке $P(1;1;1)$

$$\begin{cases} \text{v}_1 = \dfrac{-8}{5}, \\ \text{v}_2 = 4 + \left(\dfrac{-8}{5} + \dfrac{-6}{5}\right) = \dfrac{6}{5}, \\ \text{v}_3 = \dfrac{-6}{5}. \end{cases}$$

Получаем $\overline{\text{v}} = -\dfrac{8}{5}\overline{e}_1 + \dfrac{6}{5}\overline{e}_2 - \dfrac{6}{5}\overline{e}_3$.

ВЫВОДЫ.

В результате выполнения предложенной самостоятельной работы студенты должны изучить следующие дидактические единицы:

Вектор перемещений.

Лагранжево и эйлерово описание движения.

Градиенты деформаций и градиенты перемещений.

Тензоры деформаций и тензоры конечных деформаций.

Теория малых деформаций. Тензоры бесконечно малых деформаций. Геометрический смысл тензоров линейных деформаций.

Коэффициенты длины. Интерпретация конечных деформаций. Представление тензора второго ранга в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

Относительные перемещения.

Тензор и вектор линейного поворота. Главные деформации.

Инварианты деформаций. Кубическое расширение.

Круги Мора для деформаций.

Движение, течение. Материальная производная.

Скорость, ускорение, мгновенное поле скоростей.

Траектории. Линии тока. Установившееся движение.

Скорость деформации. Завихренность.

Приращение деформации.

Освоить методики расчетов в материальной и пространственной системах координат деформационных задач. Знать основные формулы теории деформации, течения и движения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Выполнение данной самостоятельной работы является первым шагом к изучению математических моделей механики сплошных сред [5].

Задачами изучения дисциплины выступает приобретение в рамках освоения теоретического и практического материала:

знаний основных понятия классической механики сплошной среды, общих законов и уравнений (закон сохранения массы, уравнения неразрывности, движения и равновесия), основных законов и понятий термодинамики сплошных сред и механики жидкостей, основ теории упругости и пластичности и приложение данных теорий в моделировании реальных процессов;

умений анализировать напряженно-деформированное состояние, а также формулировать задачи линейной теории упругости изотропных и анизотропных тел и используя критерии пластичности определять основные параметры начала необратимых деформаций;

навыков для самостоятельной математической постановки предлагаемых задач механики деформированного твердого тела и их решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Башкинова Е.В., Небогина Е.В.** Общая теория напряжений. Математические модели механики сплошных тел. Практикум./ Самара: РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 2012. – 57 с.

2. **Дроздова Ю. А., Эглит М. Э.** Механика сплошных сред: теория и задачи. Учеб. пособие - М.: Центрлитнефтегаз, 2010. - 281 с.

3. **Петкевич В. В.** Основы механики сплошных сред. Учеб. пособие - М. : Едиториал УРСС, 2001. - 398 с.

4. **Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.** Основы механики сплошной среды: курс лекций. Учеб. пособие - М. : Физматлит, 2006. - 272 с.

5. **Радченко В. П.** Введение в механику деформируемых систем. Учеб. пособие / Самар. гос. техн. ун-т. - Самара, 2009. - 241 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное пособие

БАШКИНОВА Елена Викторовна

«Основы описания деформационного движения
и течения сплошной среды»

Редактор Ю.А. Петропольская
Верстка И.О. Миняева
Выпускающий редактор Н.В. Беганова

Подп. в печать 20.03.15
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,49. Уч. -изд. л. 3,46.
Тираж 50_ экз.
Рег. № 32/15
Заказ № 681

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8