



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

**Учебное задание к лабораторным работам
и методические указания**

Самара 2003

+

Составитель *В.С. Лубенцова*

УДК 517.8

Линейное программирование: Учеб. задание к лабораторным работам / Самар. гос. техн. ун-т; Сост. *В.С. Лубенцова*. Самара, 2003. 28 с.

Предложены варианты индивидуальных заданий по 1 части курса «Методы оптимизации» по теме «Линейное программирование».

Учебное задание и методические указания предназначены для студентов дневного отделения направления 5102 специальности 010200 «Прикладная математика и информатика»

Ил. 41. Библиогр.: 11 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

Введение

Данное учебное задание к лабораторным работам является I частью учебного задания по курсу «Методы оптимизации», предназначенного для студентов инженерно-экономического факультета.

Линейное программирование – это область математического программирования, в которой рассматриваются экстремальные задачи, характеризующиеся линейными зависимостями между переменными.

Методы линейного программирования широко применяются к решению экономических задач, таких как:

- составление оптимального производственного плана;
 - оптимальное использование ресурсов;
 - составление диеты (рациона);
 - транспортная задача;
 - составление оптимальной смеси
- и т.д.

Данное учебное задание к лабораторным работам содержит 26 вариантов двух задач. Вариант задачи выбирается в соответствии с порядковым номером студента в списке группы.

При выполнении учебного задания необходимо:

- изучить теоретический материал;
- составить математическую модель задачи;
- найти решение (оптимальный план) задачи;
- проанализировать полученное решение, проверив его правильность на ЭВМ;
- оформить решение задачи в письменном виде.

Теоретические вопросы.

1. Постановка задач линейного программирования (Л.П.)
2. Примеры задач Л.П.
3. Геометрическая интерпретация задач Л.П.
4. Нахождение решения задач Л.П. симплексным методом.
5. Метод искусственного базиса.
6. Двойственные задачи Л.П.
7. Связь между решениями прямой и двойственной задач.
8. Геометрическая интерпретация двойственных задач.
9. Нахождение решения двойственных задач.
10. Экономическая интерпретация двойственных задач.
11. Анализ устойчивости двойственных оценок
12. Двойственный симплекс-метод.

Задача 1.

Составить математическую модель и решить задачу графически.

- 1.1.** Для откорма животных употребляют два корма: №1 и №2. Стоимость 1кг. корма №1 – 5 д. ед., а корма №2 – 2 д. ед. В каждом килограмме корма №1 содержится 5 единиц питательного вещества А; 2,5 единицы питательного вещества Б; 1 единица питательного вещества В. В каждом килограмме корма №2 содержится соответственно по 3 единицы вещества А и Б и 1,3 единицы питательного вещества В. Какое количество корма каждого вида необходимо расходовать ежедневно, чтобы затраты на откорм были минимальными, если суточный рацион предусматривает питательных единиц типа А не менее 225 единиц, типа Б – не менее 150 единиц и типа В – не менее 80 единиц?
- 1.2.** Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1500000 л. акилата, 1200000 л. крекинг-бензина и 1300000л. изопентона. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта А и Б соответственно. Стоимость 1000 л. бензина сорта А и Б соответственно равна 90 д. ед. и 120 д. ед. Определить месячный план производства бензина сорта А и Б, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.
- 1.3.** Заводу требуется составить оптимальный по реализации план выпуска двух видов изделий при определенных возможностях 4-х видов машин. План выпуска должен быть таким, чтобы от реализации выпущенной по этому плану продукции завод получил бы наибольшую прибыль. Оба вида изделий последовательно обрабатываются этими машинами. План должен учитывать, что первый вид машин ежедневно может перерабатывать эту продукцию в течение 18 ч., второй – 12 ч., третий – 12 ч., четвертый – 9 ч. В таблице указано время, необходимое для обработки каждого изделия этих двух видов указанными типами машин. Завод от реализации одного изделия I вида получает 4 д. ед., II вида – 6 д. ед.

Вид машин \ Изд.	1	2	3	4
I	1	0,5	1	0
II	1	1	0	1
Время работы (ч.)	18	12	12	9

1.4. Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки питательных веществ B_1 не менее 4 ед., B_2 – не менее 6 ед., B_3 – 9 ед., B_4 – 6 ед. Имеется два вида пищи: I и II.

В 1 кг. пищи I содержится питательных веществ:

$$B_1 - 2, B_2 - 0, B_3 - 1, B_4 - 3.$$

В 1 кг. пищи II содержится:

$$B_1 - 1, B_2 - 3, B_3 - 3, B_4 - 2.$$

1 кг. пищи I стоит 30 д. ед., 1 кг. пищи II стоит 20 д. ед.

Требуется так организовать питание, чтобы его стоимость была наименьшей, а организм получал бы суточную норму, указанную выше.

1.5. Ежедневно в город поставляется одним видом транспорта 12 т. Картофеля из 3-ех колхозов; из колхоза I по цене 10 д. ед. за 1 т., из II-го – по цене 30 д. ед., из III-го – по цене 10 д. ед. за тонну. Чтобы поставить картофель своевременно, необходимо на погрузку требуемых 12 тонн затратить не более 40 минут. Известно, что в колхозе I уровень механизации позволяет грузить 1 тонну за 1 мин., во II – за 4 мин., в III – за 3 минуты.

Производственные мощности этих колхозов следующие: колхоз I должен ежедневно выделять для поставки в город не более 10 тонн, II – не более 8 тонн, III – не более 6 тонн.

Как распределить заказ на поставку 12 тонн между колхозами, чтобы общая стоимость привозимого в город картофеля была минимальной?

1.6. При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 ед. питательного вещества S_1 , не менее 8 ед. S_2 и не менее 12 ед. вещества S_3 . Для составления рациона используют два вида корма.

Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг. каждого вида корма и стоимость 1 кг. корма приведены в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательного вещества 1 кг. корма	
	корм I	корм II
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Стоимость 1 кг. Корма (д. ед.)	4	6

Необходимо составить дневной рацион питательности, причем затраты на него должны быть минимальными

- 1.7.** Процесс изготовления 2-х видов изделий заводом требует, во-первых, последовательной обработки на токарных и фрезерных станках и во-вторых, затрат 2-ух видов сырья: стали и цветных металлов.

Данные о потребности каждого ресурса на единицу выпускаемого изделия и общие запасы ресурсов помещены в таблице. Прибыль от реализации единицы изделия А – 3 д. ед., единицы изделия В – 8 д. ед. Определить такой план выпуска продукции, который обеспечивает максимальную прибыль, при условии что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

	Затраты на 1 изд.		
	А	В	Ресурс
сталь (кг)	10	70	320
цв. металл	20	50	420
ток. станки	300	400	6200

- 1.8.** Имеются две первично-климатические зоны, площадь которых соответственно равна 0.8 и 0.6 млн. га.

Определить размеры посевных площадей озимых и яровых зерновых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении.

Урожайность культур по зонам и стоимость 1 ц. зерна приведены в таблице. Необходимо произвести озимых не менее 20 млн. ц. и яровых не менее 6 млн. ц.

Наименование	Урожайность, ц/га		Стоимость
	I зона	II зона	
озимые	20	25	8
яровые	25	20	7

- 1.9.** Производственная мощность цеха сборки – 120 изделий типа А и 360 изделий типа Б в сутки.

Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или другого типа (безразлично). Изделия типа А вчетверо дороже изделий типа Б. Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы была обеспечена предприятию наибольшая прибыль.

- 1.10.** На вокзалы А и В прибыло по 30 комплектов мебели. Известно, что перевозка одного комплекта с вокзала А в магазины С, Д, Е стоит соответственно 1 д. ед.; 3 д. ед.; 5 д. ед., а перевозка с вокзала В в те же магазины соответственно 2 д. ед.; 5 д. ед.; 4 д. ед.

Необходимо доставить по 20 комплектов мебели в каждый из магазинов.

Составить план перевозок, минимальный по стоимости.

- 1.11.** Для изготовления столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида приведены в следующей таблице.

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовить, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина (м ³)			
I вида	0,2	0,1	40
II вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость (человеко-ч.)	1,2	1,5	371,4
прибыль от реализации одного изделия, (д. ед.)	6	8	

- 1.12.** Чаеразвесочная фабрика выпускает чай сорта А и Б, смешивая три ингредиента: индийский, грузинский и краснодарский чай. В табл. Приведены нормы расхода ингредиентов, объем запасов каждого ингредиента и прибыль от реализации 1 т. чая сорта А и Б.

Требуется составить план производства чая сорта А и Б с целью максимизации суммарной прибыли.

Ингредиенты	Нормы расхода (т/г)		Объем запасов (т)
	А	В	
Индийский чай	0,5	0,2	600
Грузинский чай	0,2	0,6	870
Краснодарский чай	0,3	0,2	430
Прибыль от реализации 1т. продукции, (д. ед.)	320	290	

- 1.13.** На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны

ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца. Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно получают		Общее количество корма
	лисица	песец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль от реализации 1 шкурки, (д. ед.)	16	12	

1.14. В области имеются два цементных завода и три потребителя их продукции – домостроительных комбината. В таблице указаны суточные объемы производства цемента, суточные потребности в нем комбинатов и стоимость перевозки 1 т. цемента от каждого завода к каждому комбинату.

Требуется составить план суточных перевозок цемента с целью минимизации транспортных расходов.

Заводы	Производство цемента (т/сут)	Стоимость перевозки 1т. Цементa (д. ед.)		
		комбинат 1	комбинат 2	комбинат 3
1	40	10	15	25
2	60	20	30	30
	Потребность в цементе (т/сут)	50	20	30

1.15. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количествах, соответственно равных 24, 31, 18 шт. Каждый лист фанеры может быть разрезан на заготовки двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведено в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры. Определить, сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не меньше нужного количества заготовок при минимальных отходах

Вид заготовки	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	1	2
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов (см ²)	12	16

1.16. Предприятие выпускает два вида продукции: I и II.

Для производства единицы продукции вида I последовательно используется 2 ед. оборудования типа А, оборудование типа В не используется, 4 ед. оборудования типа С.

Для производства единицы продукции вида II используется 1 ед. оборудования типа А, 6 ед. типа В, тип С не используется.

Сколько единиц продукции каждого вида должно выпускать предприятие, чтобы получить наибольший доход, если известно, что каждая единица продукции вида I дает предприятию 3 д. ед., а вида II – 5 д. ед., а количество оборудования типа А – 8 ед., типа В – 18 ед., типа С – 12 ед.

1.17. Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия.

Найти план выпуска изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч.) на обработку 1 изд.		Общий фонд полезного рабочего времени оборудов. (ч)
	А	В	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации 1 изд (д. ед.)	14	18	

1.18. Для изготовления изделий №1 и №2 склад может отпускать металла не более 80 кг., причем на изделие №1 расходуется 2 кг., а на изделие №2 – 1 кг. металла. Требуется спланировать производство так, чтобы была обеспечена наибольшая прибыль, если изделий №1

требуется изготовить не более 30 шт., а изделий №2 не более 40 шт., причем 1 изделие №1 стоит 5 д. ед., а №2 – 3 д. ед.

- 1.19.** Содержание витаминов А и С в 1 кг. фруктов задано соотношением

Витамины Фрукты		
Вишня	3	150
Абрикосы	24	75

Сколько граммов вишни и абрикосов следует включать в дневной рацион, чтобы в нем оказалось не менее 6 мг. витамина А и не менее 75 мг. витамина С при минимальных затратах, если 1 кг. вишни стоит 2.5 д. ед., а 1 кг абрикосов 3 д. ед.?

- 1.20.** На предприятии для производства двух видов продукции используется 4 группы оборудования в количествах, указанных в таблице.

Группа производств-го оборудования	Необходимое кол-во ед. оборудования на 1 компл.		Количество оборудования в группе
	Продукции I	Продукции II	
А	2	2	12
В	1	2	8
С	4	0	16
Д	0	4	12
Чистый доход (д. ед. на 1 шт)	2	3	

Необходимо организовать такой выпуск продукции, чтобы доход был максимальным.

- 1.21.** Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют три вида сырья: S_1 , S_2 и S_3 .

Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в таблице.

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при его реализации получить максимальную прибыль.

Вид сырья	Запас сырья	Кол-во единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P ₁	P ₂
S ₁	20	2	5
S ₂	40	8	5
S ₃	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, д. ед.		50	40

1.22. Для откорма животных употребляется два вида корма: I и II. В каждом килограмме корма I содержится 5 ед. питательного вещества А и 2.5 ед. питательного вещества В, а в каждом кг. корма II содержится 3 ед. питательного вещества А и 3 ед. вещества В. Было установлено экспериментальным путем, что откорм животных выгоден, если каждое животное будет получать в дневном рационе не менее 30 ед. питательного вещества А и не менее 22.5 ед. вещества В. Известно, что стоимость 1 кг. корма I и 1 кг. корма II равна каждая одной д. ед. Каков должен быть ежедневный расход корма каждого вида, чтобы затраты на корм были минимальными и чтобы были соблюдены указанные выше условия питания.

1.23. Известно, что откорм животных экономически выгоден при условии, когда каждое животное получает в дневном рационе не менее 6 единиц питательного вещества А, не менее 12 ед. вещества В, не менее 4 ед. вещества С.

Для откорма животных используется два вида кормов. Следующая таблица показывает, сколько единиц каждого питательного вещества содержит 1 кг. каждого вида корма.

Корма \ Пит. вещ-ва	I	II
A	2	1
B	2	4
C	0	4

Цена корма I равна 5 д. ед. за 1 кг., а цена корма II – 6 д. ед. за 1 кг.

Какое количество каждого вида корма необходимо расходовать, чтобы затраты на него были минимальные.

- 1.24. Для нормальной жизнедеятельности человек должен потреблять в сутки определенные количества различных питательных веществ: жиров А, белков Б и углеводов С. В нашем распоряжении имеется два вида продуктов: I и II. Содержание питательных веществ в одном килограмме каждого продукта определено следующей таблицей:

Продукты Пит. вещ-ва	I	II
А	1	3
Б	2	2
С	4	9

Дневная норма питательных веществ – 6, 8, 4 единиц соответственно.

Требуется составить пищевой рацион минимальной стоимости, если цена продукта I равна 0.3 д. ед., продукта II – 0.5 д. ед.

- 1.25. В швейном цехе имеется 84 м. ткани. На пошив одного халата нужно 4 м., а на одну куртку 3 м.

Сколько следует изготовить халатов и курток для получения наибольшей прибыли от их реализации, если халат стоит 6 д. ед., а куртка 3 д. ед. Халатов можно изготовить не более 15, а курток не более 20.

- 1.26. Построить модель производственной задачи, использующей две технологии и три вида ресурсов и обеспечивающей максимальных доход. Решить задачу графически. Все данные приведены в таблице.

Вид ресурса i	Коэффициенты a_{ij}		Запас ресурса b_i
	a_{i1}	a_{i2}	
1	1	3	270
2	4	6	600
3	3	1	240
Доход C_j (д. ед.)	3	2	

Задача 2.

Составить математическую модель и решить задачу симплекс-методом.

- 2.1.** Перед проектировщиками автомобиля поставлена задача - сконструировать самый дешевый кузов, используя листовой металл, стекло и пластмассу. Основные характеристики материалов представлены в таблице.

Характеристики	Материалы		
	металл	стекло	пластмасса
Стоимость (д. ед./м ²)	25	20	40
Масса (кг/м ²)	10	15	3

Общая поверхность кузова (вместе с дверьми и окнами) должна составить 14 м², из них не менее 4 м² и не более 5 м² следует отвести под стекло. Масса кузова не должна превышать 150 кг. Сколько металла, стекла и пластмассы должен использовать наилучший проект?

- 2.2.** Участок цеха изготавливает три вида запасных деталей, проходящих обработку на двух станках – токарном и фрезерном. Затраты времени в часах на каждую деталь на токарном станке соответственно равны 2; 1; 2 ч. На фрезерном 5; 2; 2 ч. Мощность токарного станка 30, фрезерного 70.

Детали реализуются по следующей цене:

I вид 7 д. ед.

II вид 3 д. ед.

III вид 3 д. ед. на одну деталь.

Найти план выпуска деталей, обеспечивающий максимальную прибыль.

- 2.3.** Цех выпускает три вида деталей, которые изготавливаются на трех станках. На рис. показана технологическая схема изготовления детали каждого вида с указанием времени ее обработки на станках.

заготовки $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow 1\text{мин} \rightarrow 3\text{мин} \rightarrow 1\text{мин} \rightarrow 1\text{деталь} \\ \rightarrow 2\text{мин} \quad \rightarrow \quad 4\text{мин} \rightarrow 2\text{деталь} \\ \rightarrow 1\text{мин} \rightarrow 2\text{мин} \quad \rightarrow \quad 3\text{деталь} \end{array} \right.$

Суточный ресурс рабочего времени станков 1, 2, 3 соответственно составляет 890, 920, 840 мин.

Стоимость одной детали вида 1, 2 и 3 равна соответственно 3, 1 и 2 д. ед. Требуется составить суточный план производства с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

- 2.4. Предприятие выпускает три вида продукции. Уровень выпуска ее лимитируется ограниченностью имеющихся в распоряжении предприятия ресурсов (сырья, материалов, оборудования). Предприятие заинтересовано в определении такого уровня выпуска продукции по видам, при котором достигает максимума ее общая стоимость. Норма затрат ресурсов и стоимость единицы продукции каждого вида указаны в таблице

Вид ресурсов	Объем ресурсов	Норма затрат на единицу		
		I	II	III
Сырье	860	5	7	4
Материал	300	5	2	1
Оборудование	200	2	1	1
Стоимость продукции (д. ед.)		18	12	8

- 2.5. Для изготовления различных изделий А, В, С предприятие использует три различных вида сырья. Норма расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена каждого изделия, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. Изделия А, В, С могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг)			Общее кол-во сырья (кг)
	А	В	С	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена 1 шт. (д. ед.)	9	10	16	

- 2.6. Предприятие располагает ресурсами сырья, раб. силы и оборудованием, необходимыми для производства любого из трех видов производимых товаров. Затраты ресурсов на изготовление единицы данного товара, запасы ресурсов указаны в следующей таблице. Определить

оптимальный ассортимент товара, максимизирующий стоимость обработки, если стоимость обработки единицы каждого вида товаров заданы числами 17, 35, 20.

Виды ресурсов	Затраты ресурсов на изготовление единицы товара			Объем ресурсов
	I	II	III	
Сырье (кг)	3	5	2	70
Раб. сила (чел)	6	5	8	160
Оборудование	16,4	14	18	400
Стоимость обработки единицы товара (д. ед.)	17	35	20	

- 2.7. Из трех видов сырья необходимо составить смесь, в состав которой должно входить не менее 26 ед. химического вещества А, 30 ед. вещества В и 24 ед. вещества С. Количество единиц химического вещества, содержащегося в 1 кг. сырья каждого вида, указано в таблице. В ней же приведена цена 1 кг. сырья каждого вида.

Составить смесь, содержащую не менее нужного количества вещества данного вида и имеющую минимальную стоимость.

Вещество	Количество единиц вещества, содержащегося в 1 кг. сырья вида			
	1	2	3	4
А	1	1	-	4
В	2	-	3	5
С	1	2	4	6
Цена 1 кг. Сырья (д. ед.)	5	6	7	4

- 2.8. Предприятие должно производить 3 вида продукции, используя при этом различное оборудование на каждой из трех операций. Мощность одорудования на первой операции – 80 ч., на II – 50 ч., на III – 210 ч. Технические коэффициенты использования оборудования на I операции для единицы каждой продукции равны соответственно на

I 2; 5; 0

II 3; 1; 1

III 13; 4; 4

Прибыль предприятия от единицы продукции каждого вида равна соответственно 13; 8; 4 д. ед. Определить, сколько продукции каждого

вида должно выпустить предприятие, чтобы получить максимальную прибыль.

- 2.9.** Рацион кормления коров на молочной ферме может состоять из трех продуктов – сена, силоса и концентратов. Эти продукты содержат питательные вещества – белок, кальций и витамины. Численные данные приведены в табл. В расчете на одну корову суточные нормы потребления белка и кальция составляют не менее 2000 и 210 г. Соответственно. Потребление витаминов строго дозировано и должно быть равно 87 мг. в сутки.

Продукты	Питательные вещества		
	Белок (г/кг)	Кальций (г/кг)	Витамины (г/кг)
Сено	50	10	2
Силос	70	6	3
Концентраты	180	3	1

Составить самый дешевый рацион, если стоимость 1 кг. сена, силоса и концентрата равна соответственно 1.5; 2; 6 д. ед.

- 2.10.** Для изготовления трех видов изделий фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. На изготовление указанных изделий заняты токарные станки. Нормы расхода ресурсов, а также прибыль от реализации единицы изделия каждого вида указаны в таблице. Определить план выпуска изделий, обеспечивающий максимальную прибыль.

Вид ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расходов ресурсов на единицу времени		
		II	II	III
Сталь, кг	200	1	2	1
Цветные металлы	300	3	4	1
Токарные станки	600	3	6	5
Прибыль от реализации единицы изд. д. ед.		10	12	15

- 2.11.** На звероферме могут выращиваться песцы, черно-бурые лисицы, нутрии и норки. Для их питания используют три вида кормов. В таблице приведены нормы расхода кормов, их ресурс в расчете на день, а также прибыль от реализации одной шкурки зверя.

Вид корма	Нормы расхода кормов (кг/день)				Ресурс кормов (кг)
	Песец	Лиса	Нутрия	Норка	
I	1	2	1	2	300
II	1	4	2	0	400
III	1	1	3	2	600
Прибыль д. ед./шкур	6	12	8	10	

Определить, сколько и каких зверьков следует выращивать на ферме, чтобы прибыль от реализации шкурок была наименьшей.

- 2.12.** Торговое предприятие планирует организовать продажу четырех видов товара (А, В, С, Д), используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч. И площадь торгового зала 180 м². При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товара А, В, С, Д и прибыль от их продажи, которые приведены в таблице. Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимальную прибыль.

Показатели	Товар				Общее количество ресурсов
	А	В	С	Д	
Расход рабочего времени на единицу товара (ч.)	0,6	0,8	0,6	0,4	840
Использование площади торгового зала на единицу товара (м ²)	0,1	0,2	0,4	0,1	180
Прибыль от продажи единицы товара (д. ед.)	5	8	7	9	

- 2.13.** Завод изготавливает корпуса для холодильников и комплектует их оборудованием, поставляемым без ограничений другими предприятиями. В табл. указаны нормы трудозатрат, затрат материалов для изготовления корпусов, ограничения по этим ресурсам в расчете на месяц и прибыль от реализации холодильника в каждой из пяти марок. Найти месячный план выпуска холодильников, максимизирующий прибыль.

Наименование ресурса	Марка холодильника					Объем ресурса
	1	2	3	4	5	
Трудозатраты (чел.)	2	3	5	4	4	9000
Металл (м ²)	2	2	4	5	0	8500
Пластик (м ²)	1	3	2	0	4	4000
Краска (кг.)	1	2	3	3	2	5000
Прибыль (д. ед.)	40	70	120	120	50	

2.14. Для изготовления трех видов изделий А, В, С используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида указаны в таблице. Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку изделия			Общий фонд рабочего времени оборуд. (ч.)
	А	В	С	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (д. ед.)	10	14	12	

2.15. Объединение “Комфорт” производит холодильники, газовые плиты, морозильные шкафы и электропечи по цене 200, 180, 250, 100 д. ед. соответственно. Постоянным фактором ограничивающим объем производства, является фиксированная величина трудовых ресурсов – 12000 человеко-часов в месяц. Выяснилось, однако, что в ближайший месяц дефицитной будет и листовая сталь для корпусов указанных изделий, поскольку поставщики смогут обеспечить лишь 7000 м² материала. Требуется составить план производства на данный месяц, с тем чтобы максимизировать стоимость выпущенной продукции. Известно, что для изготовления холодильника требуется 2 м² листовой

стали и 3 человеко часа рабочего времени, для газовой плиты – соответственно 1,5 м² и 3 чел.-ч., для морозильного шкафа – 3 м² и 4 чел.-ч., для электропечи – 1 м² и 2 чел.-ч.

- 2.16.** При откорме животных каждое животное ежедневно должно получать не менее 60 ед. питательного вещества А, не менее 50 ед. вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Указанные питательные вещества содержат три вида корма. Содержание единиц питательных веществ в 1 кг. каждого из видов корма приведены в таблице. Составить дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ при минимальных денежных затратах, если цена 1 кг. корма вида I составляет 9 д. ед., корма II вида – 12 д. ед. и корма III вида – 10 д. ед.

Питательное вещество	Количество питательных веществ в 1 кг. корма вида		
	I	II	III
А	1	3	4
В	2	4	2
С	1	4	3

- 2.17.** Стальные прутья длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 45, 35 и 50 см. Требуемое количество заготовок данного вида составляет соответственно 40, 30 и 20 шт. Возможные варианты разреза и величина отходов при каждом из них приведены в след. таблице:

Длина заготовки (см.)	Варианты разреза					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Величина отходов (см.)	20	30	15	5	25	10

Определить сколько прутьев по каждому из возможных вариантов следует разрезать, чтобы получить не менее нужного количества заготовок каждого вида при минимальных отходах.

2.18. Продукцией городского молочного завода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в бутылки. На производство 1 т. молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т. молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т. сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 ч. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг. молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-часов, а автоматы по расфасовке сметаны – в течение 16,25 часа. Прибыль от реализации 1 т. молока, кефира и сметаны соответственно равна 30, 22 и 136 д. ед. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т молока, расфасованного в бутылки. На производство другой продукции нет ограничений. Определить какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно поставлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

2.19. Из листового проката необходимо вырезать заготовки двух видов А и В для производства 60 штук изделий. Для одного изделия требуется три заготовки типа А и восемь заготовок типа В. Размеры листа, а также размеры и конфигурация заготовок позволяют выбрать четыре рациональных варианта раскроя листа.

Построить модель задачи раскроя при след. исходных данных, обеспечивающую минимум отходов.

Заготовка i	Варианты раскроя				Потребность в i
	1	2	3	4	
А	4	3	2	1	180
В	0	4	6	10	480
Отходы C_j	12	5	3	0	

2.20. Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели А, В, С использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья на производство 1 т. карамели данного вида приведены в таблице. В ней же указано общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано фабрикой, а также приведена прибыль от реализации карамели данного вида. Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

Вид сырья	Норма расхода сырья на 1 т. карамели (т.)			Общее количество сырья
	А	В	С	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	-	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т. продукции (д. ед.)	108	112	126	

2.21. На три станции A_1, A_2, A_3 поступил груз, который надо перевезти 4 заказчикам B_1, B_2, B_3, B_4 . Потребности заказчиков, количество грузов на станциях и стоимость в д. ед. перевозки единицы груза с данной станции данному заказчику указаны в таблице.

Пункты назначения Пункты отправления	Стоимость перевозок				Количество грузов на станции
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	4	15	9	120
A_2	11	2	7	3	80
A_3	4	5	2	8	100
Потребности заказчиков	85	65	90	60	

Требуется спланировать перевозки так, чтобы общая стоимость была наименьшей.

2.22. Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три типа основного оборудования: токарное фрезерное, шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации будет максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку изделия				Общий фонд рабочего времени (ст-ч)
	1	2	3	4	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	-	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	-	340
Прибыль от реализации ед. продукции (д. ед.)	8	3	2	1	

2.23. Максимальная площадь, которая согласно перспективному плану может быть отведена под плодовые деревья, составляет 1000 га. На этой площади предполагается посадить три вида деревьев: семечковые, косточковые, ягодники. Обозначим их соответственно P_1 , P_2 , P_3 . В хозяйстве имеются следующие три вида ограниченных ресурсов: пашня (S_1), трудовые ресурсы (S_2), денежно-материальные (S_3). Запасы, указанных ресурсов таковы: b_1 , b_2 , b_3 . Известно, что на 1 га j -го вида посадок ($j=1, 2, 3$) затрачивается a_{ij} единиц i -го ресурса ($i=1, 2, 3$). Цена продукции с 1 га j -той культуры составляет c_{ij} д. ед. Численные значения исходных данных представлены в таблице.

Вид ресурсов	Единицы измерения	Запас ресурсов	Вид продукции		
			P_1	P_2	P_3
S_1	тыс. га	$b_1=1$	$a_{11}=1$	$a_{12}=1$	$a_{13}=1$
S_2	тыс. чел-дней	$b_2=200$	$a_{21}=100$	$a_{22}=60$	$a_{23}=200$
S_3	д. ед	$b_3=600$	$a_{31}=400$	$a_{32}=200$	$a_{33}=800$
	Цена продукции с 1 га (д. ед.)		3	2	5

Требуется определить такие площади X_1 , X_2 , X_3 посадок каждого вида, чтобы обеспечить общий максимум продукции в стоимостном выражении.

2.24. Совхоз может засеять свои поля пшеницей четырех сортов, урожайность которых зависит от того будет ли лето дождливым или сухим. Соответствующие данные приведены в табл. Какие сорта пшеницы и в какой пропорции следует сеять, чтобы максимизировать гаранти-рованный (не зависящий от погоды) урожай?

Погода	Урожайность (ц/га)			
	Сорт 1	Сорт 2	Сорт 3	Сорт 4
Дождливая	25	20	30	15
Сухая	15	20	10	40

2.25. Для серийного изготовления детали механический цех может использовать пять различных технологий ее обработки на токарном, фрезерном, строгальном и шлифовальном станках. В таблице указано время (в минутах) обработки детали на каждом станке в зависимости от технологического способа, а также общий ресурс рабочего времени станков каждого вида за одну смену.

Станки	Технологические способы					Ресурсы времени станков (мин)
	1	2	3	4	5	
Токарный	2	1	3	0	1	4100
Фрезерный	1	0	2	2	1	2000
Строгальный	1	2	0	3	2	5800
Шлифовальный	3	4	2	1	1	10800

Требуется указать, как следует использовать имеющиеся технологии, чтобы добиться максимального выпуска продукции.

2.26. Предприятие может выпускать четыре вида продукции – P_1 , P_2 , P_3 , P_4 без ограничений на количественный выпуск этой продукции. Для изготовления этой продукции предприятие располагает в течение месяца следующими ресурсами: трудовыми ресурсами в количестве 16 чел-нед; полуфабрикатами массой 110 кг, станочным оборудованием в объеме 100 станко-смен. Для изготовления одной штуки продукции P_1 , P_2 , P_3 , P_4 требуется 1 чел-нед для каждого вида продукции, соответственно полуфабрикатов 6, 5, 4, 3 кг и станочного оборудования 4, 6, 10, 13 станко-смен. Цена одной шт. каждого вида продукции равна соответственно 60, 70, 120 и 130 д. ед. Требуется составить такой план выпуска, чтобы получаемый доход был максимальным. Условия данной задачи приведены в таблице.

Ресурс	Продукция				Объем ресурса
	P_1	P_2	P_3	P_4	
Трудовые ресурсы, чел-нед.	1	1	1	1	16
Полуфабрикаты, кг.	6	5	4	3	110
Сменное оборудование, станко-смены	4	6	10	13	100
Цена 1 шт. д. ед.	60	70	120	130	
План выпуска	X_1	X_2	X_3	X_4	

Методические указания к выполнению расчетного задания

Задача 1. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в таблице 1. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 1

Вид сырья	нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		общее количество сырья (кг)
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (д. ед.)	30	40	

Учитывая, что изделия А и В могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен) требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготавливаемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства.

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида А и x_2 изделий вида В составит $F = 30x_1 + 40x_2$. Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных значений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором целевая функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для

этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (I) \\ 4x_1 + 4x_2 = 120, & (II) \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, & (III) \\ x_1 = 0, & x_2 = 0. \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 1.

Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству.

Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи OABCD. Найдем точку, принадлежащую этому пятиугольнику, в которой функция F принимает максимальное значение.

Для этого построим линию уровня $F = const$, например:

$$30x_1 + 40x_2 = 480.$$

Перемещая линию уровня в направлении градиента (вектор \vec{c}), найдем ее последнюю общую точку с многоугольником решений задачи. Этой точкой будет вершина В. Координаты этой вершины и определяют план выпуска изделий А и В, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки В как точки пересечения прямых II и III. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120 \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x_1^* = 12, x_2^* = 18$. Следовательно, оптимальный план будет $X = \{12, 18\}$, а максимальная прибыль составит

$$F_{max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080 \text{ д. ед.}$$

Задача 2. Требуется составить смесь нефтепродуктов, содержащую три химических вещества А, В, С. Известно, что составленная смесь должна содержать вещества А не менее 6 единиц, вещества В не менее 8 единиц,

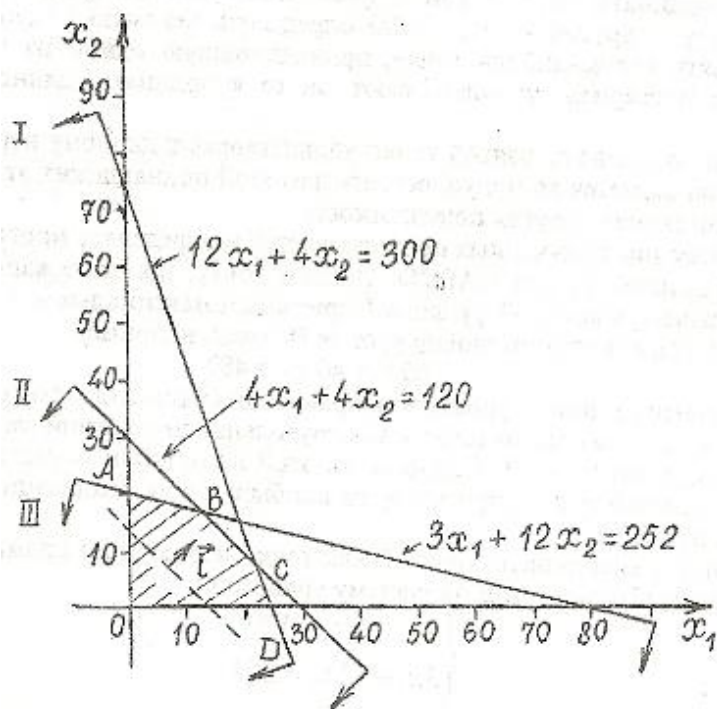


Рис. 1

вещества С не менее 12 единиц. Вещества А, В, С содержатся в трех видах продуктов – I, II, III в концентрации, указанной в таблице 2:

Таблица 2

Продукты	Химические вещества		
	А	В	С
I	2	1	3
II	1	2	4
III	3	1,5	2

Стоимость единицы продуктов I, II, III различна: единица продукта I стоит 2 д. ед., единица II – 3 д. ед., единица III – 2,5 д. ед. Смесь надо составить так, чтобы стоимость используемых продуктов была наименьшей.

Решение. Построим математическую модель задачи составления смеси. Число единиц продукта I, входящего в смесь, обозначим через x_1 , продукта II – через x_2 , продукта III – через x_3 .

Составленная смесь должна содержать вещество А, которое содержится во всех трех продуктах. На каждую единицу продукта I приходится 2 части концентрации вещества А. Следовательно, если использовано x_1 единиц продукта I, то в составляемой смеси будет $2x_1$ частей вещества А. Если использовано x_2 единиц продукта II, то в смеси будет $1x_2$ частей вещества А, и, если использовано x_3 единиц продукта III, то в смеси будет $3x_3$ частей вещества А. Так как общее количество вещества А в смеси должно быть не меньше 6, то

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6.$$

Рассуждая аналогично относительно концентрации веществ В и С, получим:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 &\geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 12. \end{aligned}$$

Общая стоимость смеси равна

$$2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3. \quad \text{Рис. 2}$$

Из условия задачи следует, что число единиц используемых продуктов всегда неотрицательно: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

Таким образом, математическая модель задачи представлена системой линейных неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + 1,5x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

На множестве решений которой необходимо найти наименьшее значение целевой функции

$$F=2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3.$$

Будем решать задачу симплекс – методом.

Для этого запишем систему ограничений в канонической форме, вводя дополнительные неотрицательные переменные x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + 1,5x_3 - x_5 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_6 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6.$$

Сначала найдем одно из неотрицательных базисных решений:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободн. члены
	2	1	3	-1	0	0	6
	1	2	1 1/2	2	-1	0	8
	3	<u>4</u>	2	0	0	-1	12
F	-2	-3	-5/2	0	0	0	0
	5/4	0	5/2	-1	0	1/4	3
	-1/2	0	1/2	0	-1	<u>1/2</u>	2
	3/4	1	1/2	0	0	-1/4	3
F	1/4	0	-1	0	0	-3/4	9
	3/2	0	9/4	-1	<u>1/2</u>	0	2
	-1	0	1	0	-2	1	4
	1/2	1	3/4	0	-1/2	0	4
F	-1/2	0	-1/4	0	-3/2	0	12
x_5	3	0	<u>9/2</u>	-2	1	0	4
x_6	5	0	10	-4	0	1	12
x_2	2	1	3	-1	0	0	6
F	4	0	13/2	-3	10	0	18

Теперь переходим к базису x_2, x_3, x_6 :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Свободн. Члены
x_2	0	1	0	1/3	-2/3	0	10/3
x_3	2/3	0	1	-4/9	2/9	0	8/9
x_6	-5/3	0	0	4/9	-20/9	1	28/9
F	-1/3	0	0	-1/9	-13/9	0	$12\frac{2}{9}$

Итак, оптимальный план есть:

$$x_1 = 0, x_2 = 10/3, x_3 = 8/9, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 28/9, F_{\min} = 12\frac{2}{9}$$

Составленная смесь содержит вещества

$$A: 3\frac{1}{3} + 3\frac{8}{9} = 6 \text{ ед.}$$

$$B: 2 \cdot 3\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{9} = 8 \text{ ед.}$$

$$C: 4 \cdot 3\frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{8}{9} = 15\frac{1}{9} \text{ ед.} > 12 \text{ ед.}$$

и использует только два вида продукции – II и III.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1993.
2. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. М.: Наука, 1981.
3. *Балашевич В.А.* Математические методы в управлении производством. Минск: Высшая школа, 1985.
4. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.* Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1980.
5. *Монахов В.М., Беляева Э.С., Краснер Н.Я.* Методы оптимизации. М.: Просвещение, 1978.
6. *Терехов Л.Л.* Экономико-математические методы. М.: Статистика, 1972.
7. *Щедрин Н.И., Кархов А.Н.* Математические методы программирования в экономике. М.: Статистика, 1974.
8. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Физмат, 2001.
9. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Высшая математика: Математическое программирование. Минск: Высшая школа, 2001.
10. *Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С.* Руководство к решению задач по математическому программированию. Минск: Высшая школа, 2001.
11. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 2001.

Линейное программирование

ЛУБЕНЦОВА Вера Степановна

Редактор Н.В. Вершинина
Технический редактор Г.Н. Шанькова

Подписано в печать 04.11.03
Формат 60 x 84 1/16. Бум. офсетная
Печать офсетная
Усл. П. л. 1,63. Усл. Кр. Отг. 1,63. Уч. –изд. л. 1,6
Тираж 100 экз. С-233

Государственное образовательное учреждение высшего
Профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.