МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ ИГР

Методические указания для самостоятельной работы

Самара
Самарский государственный технический университет
2011

Составитель *В.С. Лубенцова*

УДК 517.8

Применение линейного программирования в теории игр: Методиеские указания для самостоятельной работы. / Самар. гос. техн. ун-т; Сост. *В.С. Лубенцова*. Самара, 2011. 27 с.

Предложены варианты индивидуальных заданий по курсу «Методы оптимизации» по теме «Линейное программирование». Даны примеры решения задач и краткое изложение теории

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010501 «Прикладная математика и информатика»

Ил. 12. Библиогр.: 6 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр – это раздел прикладной математики, в котором рассматриваются методы принятия оптимальных решений (стратегий) в конфликтных ситуациях. Игрой называется упрощенная модель таких ситуаций, которая отличается от реального конфликта тем, что ведется по определенным правилам. Методы и рекомендации теории игр разрабатываются применительно к таким специфическим конфликтным ситуациям, которые обладают свойством многократной повторяемости. Чаще всего методы теории игр находят применение в экономике, социологии, политике, а также в кибернетике и биологии.

Математические основы теории игр впервые были изложены в 1944 году в монографии Дж. Неймана и О. Моргенштерна « Теория игр и экономическое поведение». Первые приложения теория игр нашла в математической статистке и в решении некоторых военных задач, возникших во время второй мировой войны. Её использовали также как удобный источник теоретических моделей в экономике и социологии, а также в теории операций и линейном программировании. В настоящее время теория игр бурно развивается. Методы теории игр широко проникли в управленческую практику и используются не только для решения общехозяйственных задач, но и для анализа стратегических проблем предприятий, разработок сложных организационных структур [1], [5].

В данных методических указаниях к лабораторной работе кратко изложена теории матричных игр, показаны способы сведения игровых задач к задачам линейного программирования, приведены примеры решения таких задач и даны варианты заданий для выполнения лабораторной работы.

1. Цель работы

Целью данной работы является изучение матричных игр в смешанных стратегиях. Для решения таких игр применяются методы линейного программирования, которые изучаются студентами четвертого курса специальности 010501 в дисциплине "Методы оптимизации".

2. Программное обеспечение

Для выполнения работы используются средства MICROSOFT ECXEL и пакет «Поиск решения».

3. Последовательность выполнения работы

1. Рассматривается графический метод решения матричных игр, применимый к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии. Строятся графики оптимальных стратегий для первого и второго игрока. Определяется цена игры.

2. Игровая задача сводится к задаче линейного программирования. Для этого составляется линейная модель игровой задачи для каждого из игроков и для одного из них задача решается симплексным методом. При нахождении оптимального решения для другого игрока определются двойственные оценки.

4. Основные понятия теории игр

В процессе целенаправленной человеческой деятельности возникают ситуации, в которых интересы отдельных лиц (участников, групп, сторон) либо прямо противоположны, либо, будучи примиримыми, все же не совпадают. Простейшими примерами таких ситуаций являются спортивные игры, арбитражные споры, военные учения и др. Каждый из участников сознательно стремится добиться наилучшего результата за счет другого участника. Подобного рода ситуации встречаются и в различных сферах производственной деятельности. Так в экономике приходится сталкиваться с ситуацией, когда при наличии многих участников эффективность решения одного из них зависит от того, какие решения приняли другие участники. Например, доход предприятия от продажи изделия зависит не только от установленной на него цены, но и от количества купленных покупателем изделий. Или при выборе ассортимента товаров, выпускаемых предприятием, необходимо учитывать, какой ассортимент товаров выпускают другие предприятия.

Все подобные ситуации можно разбить на два типа: интересы участников совпадают и они могут договориться о совместных действиях; интересы участников не совпадают. Ситуации такого типа называются *конфликтными*. Построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой методов решений возникающих в этих ситуациях задач занимается теория игр [2].

Задачей теории игр является выработка рекомендаций для игроков, т.е. определение для них оптимальных стратегий. *Стратегией игрока* называется система правил, однозначно определяющих поведение игрока на каждом шаге в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. *Оптимальной* называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает данному игроку максимально возможный средний выигрыш. Количество стратегий у каждого игрока может быть конечным и бесконечным, в зависимости от этого игры подразделяются на конечные и бесконечные.

Рассмотрим простейшую математическую модель конечной конфликтной ситуации, когда имеются два участника и когда выигрыш одного равен проигрышу другого. Такая модель называется антагонистической игрой двух лиц с нулевой суммой.

В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками, положительна, то выигрывает первый игрок количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

У первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать 1), A_2 (записать 2), A_3 (записать 3). У второго игрока также три стратегии: B_1, B_2, B_3. Задача первого игрока — максимизировать свой выигрыш, задача второго игрока — минимизировать свой проигрыш.

Игру можно представить в виде матрицы, в которой строки — стратегии первого игрока, столбцы — стратегии второго игрока, а элементы матрицы — выигрыши первого игрока, Такую матрицу называют *платежной*. Для рассматриваемой задачи она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок выбрал стратегию A_1, то в худшем случае он получит выигрыш $\alpha_1 = \min(0; -1; -2) = -2$. Соответственно при выборе стратегии A_2 — $\alpha_2 = \min(1; 0; -1) = -1$, A_3 — $\alpha_3 = \min(2; 1; 0) = 0$. Поэтому первый игрок должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш $\alpha = \max \alpha_i = \max(-2; -1; 0) = 0$, где $i = \overline{1,3}$. Величина α — гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе первый игрок, называется нижней ценой игры (maxmin).

Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Второй игрок при выборе стратегии B_1 в худшем случае будет иметь проигрыш $\beta_1 = \max(0; 1; 2) = 2$. При выборе стратегий B_2 и B_3 проигрыш составит, соответственно, β_2 = max (-1; 0; 1)= 1; β_3 =max (-2; -1; 0)= 0. Он выбирает стратегию, при которой его проигрыш будет минимальным и составит β = min β_j = min (2; 1; 0) = 0, $j = \overline{1,3}.$

Величина β — гарантированный проигрыш второго игрока — называется верхней ценой игры (minmax). Для матричных игр справедливо неравенство $\alpha \leq \beta$.

Если $\alpha = \beta$, то такая игра называется игрой *с седловой точкой*. Элемент a_{ij} платежной матрицы, соответствующий паре оптимальных стратегий, называется *седловой* точкой матрицы ν . В этом случае $\alpha = \beta = \nu$. В рассмотренном примере матрица игры имеет седловую точку и цена игры ν = 0.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется *смешанной*.

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, с которыми игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассматривать как m-мерные векторы, для координат которых $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$.

Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n-мерные векторы $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, для координат которых $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, $y_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}.$

В основной теореме теории игр утверждается, что каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в области смешанных стратегий. Применение первым игроком оптимальной стратегии должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры. Поэтому выполняется соотношение $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{i\text{опт}} \geq \nu$, где a_{ij} - элементы платежной матрицы.

Аналогично второму игроку оптимальная стратегия $y_{j\text{опт}}$ должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры, т.е. справедливо соотношение $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j\text{опт}} \leq \nu$.

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Потому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и заведомо невыгодных стратегий. Рассмотрим, например, игру, представленную платежной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Нижняя цена игры α = max (3, 1, 3, 1, 1)=3; верхняя цена игры β = min (8, 7, 7, 4, 5)=4; $\alpha \neq \beta$; цена игры $3 \leq \nu \leq 4$. Элементы стратегий A_2 и A_4 одинаковы, поэтому одну из них можно исключить. Все элементы стратегии A_2 меньше соответствующих элементов стратегии A_1, а элементы стратегии A_5

меньше соответствующих элементов стратегии A_3, поэтому стратегии A_2 и A_5 можно исключить как заведомо невыгодные для первого игрока. В результате матрица А значительно упрощается

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для второго игрока, сравнивая B_1, B_2, B_3 с B_4, исключаем их из дальнейшего рассмотрения. В результате преобразований получим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = \max(3, 3)=3; \quad \beta = \min(4, 5)=4; \quad \alpha \neq \beta; \quad 3 \leq \nu \leq 4 .$$

5. Графический метод решения матричных игр

Графический метод применим к играм, в которых хотя бы один игрок имеет только две стратегии. Рассмотрим игру $(2 \times n)$

Таблица 1

		Второй игрок			
		y_1	y_2	……	y_n
Первый игрок	x_1 $x_2 = 1-x_1$	a_{11} a_{21}	a_{12} a_{22}	…… …. ..	a_{1n} a_{2n}

Предполагаем, что игра не имеет седловой точки. Обозначим: x_1— вероятность применения первым игроком 1-й стратегии,

x_2 — вероятность применения первым игроком 2-й стратегии, причем x_2 =1-x_1; y_1—вероятность применения вторым игроком первой стратегии, y_2—вероятность применения вторым игроком второй стратегии и т.д., y_n— вероятность применения вторым игроком n-ой стратегии. Ожидаемый выигрыш первого игрока при применении вторым 1-й стратегии составит $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = a_{11}x_1 + a_{21} - a_{21}x_1 = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$. Аналогично найдем ожидаемые выигрыши первого игрока при применении вторым игроком 2, 3,….., n-й стратегий. Полученные данные представлены в табл. 2

Таблица 2

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22}$
………….	…………...
n	$(a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n}$

Из таблицы видно, что ожидаемый выигрыш первого игрока линейно зависит от x_1. На графике можно построить выражения ожидаемых выигрышей первого игрока. Первый игрок должен выбирать такие стратегии, чтобы максимизировать свой минимальный ожидаемый выигрыш. Поэтому оптимальная стратегия первого игрока определяется как точка пересечения прямых, максимизирующих его минимальный ожидаемый выигрыш. Аналогично находится оптимальная стратегия второго игрока. Она определяется как точка пересечения прямых, минимизирующих его максимально ожидаемый проигрыш.

Пример 1. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицу можно упростить, выключив из рассмотрения первый и четвертый столбцы, так как их элементы больше соответствующих элементов второго столбца. В результате матрица принимает вид: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

α =max(1, 1)=1; β = min(2, 3)=2; $\alpha \neq \beta$; $1 \leq \nu \leq 2$. Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Найдем ожидаемые выигрыши первого игрока. Построим таблицу, аналогичную таблице 2.

Таблица 3.

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$(2 - 1)x_1 + 1= x_1 + 1$
2	$(1 -3)x_1 + 3= -2x_1 + 3$

Найдем решение этой игры графическим методом. На оси X отметим точки $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, через которые проведем прямые, перпендикулярные оси X. Подставляя $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ в выражение

x_1 + 1, найдем значения, которые отложим на соответствующих перпендикулярных прямых. Соединив эти точки, получим прямую. Аналогично рассмотрим выражение $-2x_1 + 3$ (рис.5.1) Оптимальная стратегия первого игрока определится из равенства выражений $x_1 + 1 = -2x_1 + 3$, отсюда - $x_1 = 2/3$, $x_2 = 1 - x_1 = 1/3$.

Цена игры $\nu = x_1 + 1 = 2/3+1=5/3$. Оптимальная стратегия первого игрока: $x_{опт} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, при этом цена игры $\nu = \frac{5}{3}$.

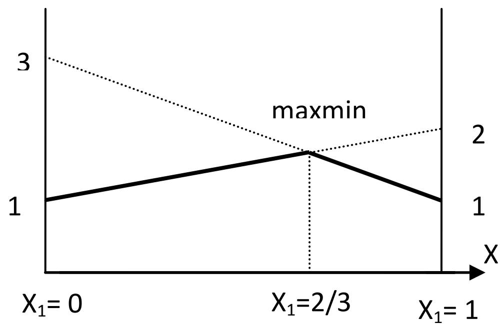

Рис. 5.1

Для второго игрока оптимальная стратегия определяется аналогично. Составляется таблица, аналогичная таблице 3.

Таблица 4

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$(2 - 1)y_1 + 1 = y_1 + 1$
2	$(1 - 3)y_1 + 3 = -2y_1 + 3$

Как видно из рис.5.2, оптимальная стратегия второго игрока $y_{опт} = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$. Цена игры равна при этом равна 5/3.

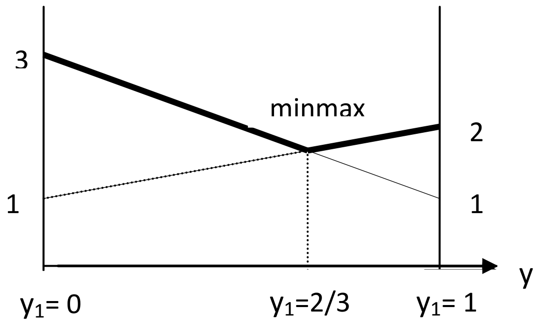

Рис. 5.2

Таким образом, если первый игрок с вероятностью 2/3 будет применять первую стратегию и с вероятностью 1/3 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 5/3;

Если второй игрок с вероятностью 2/3 будет применять вторую стратегию, с вероятностью 1/3 - третью и не будет применять первую и четвертую стратегии, то при достаточно большом количестве игр с данной платежной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 5/3. Таким образом, оптимальные стратегии для обоих игроков определены графически. Такое решение возможно лишь в том случае, когда число стратегий у одного из игроков (в данном случае у первого игрока) равно двум. Большое количество примеров графического решения задач приведено в работе [4].

Пример 2. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрицу можно упростить, исключив из рассмотрения третью строку, так как её элементы меньше (или равны) соответствующих элементов первой строки. В результате платежная матрица имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha = \max(2, 1, -2) = 2; \quad \beta = \min(4, 5) = 4; \quad \alpha \neq \beta; \quad 2 \le \nu \le 4 .$$

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Определим возможные стратегии второго игрока. Составим таблицу 5.

Таблица 5

Чистые стратегии первого игрока	Ожидаемые проигрыши второго игрока
1	$(2 - 3)y_1 + 3 = -y_1 + 3$
2	$(4 - 1)y_1 + 1 = 3y_1 + 1$
3	$(-2 - 5)y_1 + 5 = -7y_1 + 5$

Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям второго игрока (рис. 5.3). Для этого полагаем в полученных линейных соотношениях $y_1=0$ и $y_1=1$ и строим отрезки прямых, находим точки их пересечения.

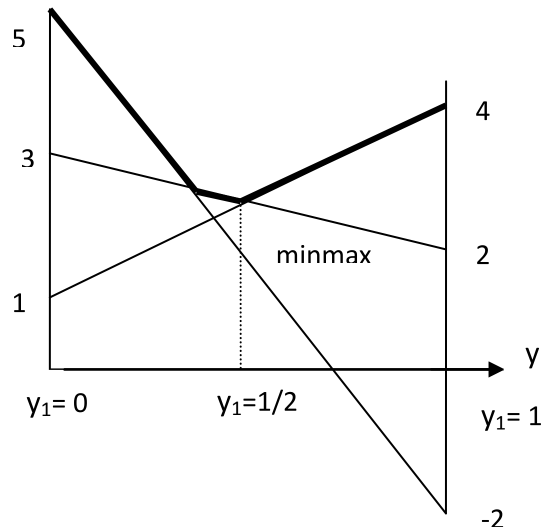

Рис. 5.3

Из рисунка видно, что последняя стратегия является не активной и поэтому её надо исключить из дальнейших рассмотрений. Точку minmax определяют первая и вторая стратегии первого игрока. Оптимальная стратегия второго игрока $\bar{y}_{\text{опт}} = \left(\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$. При этом цена игры $\nu = \frac{5}{2}$.

Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока рассматриваем платежную матрицу вида:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этого построим таблицу 6

Таблица 6

Чистые стратегии второго игрока	Ожидаемые выигрыши первого игрока
1	$(2-4)x_1 + 4 = -2x_1 + 4$
2	$(3-1)x_1 + 1 = 2x_1 + 1$

Строим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям первого игрока (рис. 5.4) и находим точку maxmin. Таким образом, оптимальная стратегия первого игрока: $\bar{x}_{опт} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right)$

.

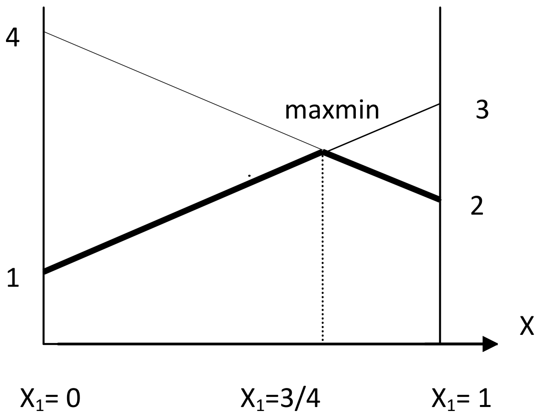

Рис.5.4

6. Решение матричных игр сведением к задаче линейного программирования

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом и наоборот, задача линейного программирования может быть представлена как игра [3], [6]. Для первого игрока математическая модель задачи записывается в виде:

$$L(\bar{x}) = v \to \max$$

при ограничениях:
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Математическую модель можно упростить, разделив все (n + 1) ограничений на v. Это возможно при $v \neq 0$. При $v = 0$ рекомендуется прибавить ко всем элементам платежной матрицы любое положительное число, что гарантирует положительность значения цены модифицированной игры. Действительное значение цены игры получается вычитанием этого положительного числа из модифицированного значения. Если $v < 0$, то можно таким же образом модифицировать игру, прибавив к элементам платежной матрицы положительное число, либо сменить знаки неравенств в ограничениях. Полагая $v > 0$, систему ограничений можно записать так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1/\nu + a_{21}x_2/\nu + \cdots + a_{m1}x_m/\nu \ge 1, \\ a_{12}x_1/\nu + a_{22}x_2/\nu + \cdots + a_{m2}x_m/\nu \ge 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1/\nu + a_{2n}x_2/\nu + \cdots + a_{mn}x_m/\nu \ge 1, \\ x_1/\nu + x_2/\nu + \cdots + x_m/\nu = 1/\nu. \end{cases}$$

Обозначим $X_i = x_i/\nu$. Так как $\nu \to \max$, то $1/\nu \to \min$. Получим задачу линейного программирования вида

$$L(\overline{X}) = X_1 + X_2 + \cdots + X_m \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \cdots + a_{m1}X_m \ge 1, \\ a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{m2}X_m \ge 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \cdots + a_{mn}X_m \ge 1, \end{cases}$$

$$X_i \ge 0, \qquad i = \overline{1,m}.$$

Для второго игрока математическая модель записывается в виде $S(\overline{Y}) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \cdots + a_{1n}Y_n \le 1, \\ a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{2n}Y_n \le 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \cdots + a_{mn}Y_n \le 1, \end{cases}$$

$Y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ где $S(\overline{Y}) = 1/\nu, \quad Y_j = y_j/\nu$.

Задача второго игрока является двойственной по отношению к задаче первого игрока. Можно найти решение для одного из игроков, а затем по теореме двойственности — решение для другого игрока.

Библиографический список

1. Акимов В.П. Основы теории игр. – М.: МГИМО-Университет, 2008.

2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании. – М.: Дело, 2000.

3. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. – М.: Лань, 2010.

4. Макаров С.И., Севастьянова С.А. Экономико-математические методы и модели. Задачник. – М.: КНОРУС, 2009.

5. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. Учебное пособие для университетов. – М.: Высшая школа, 1998.

6. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций. – М.: Гелиос, 2006.

ЛУБЕНЦОВА Вера Степановна

Применение линейного программирования в теории игр

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 1.05.2011

Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная.

.Усл. п. л. 1.6. Уч.-изд. л. 1.52.

Тираж 100 экз.

Рег. №

Заказ №

Государственное образовательное учреждение

Высшего профессионального образования

«Самарский государственный технический университет»

443100. г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Главный корпус.

Отпечатано в типографии

Самарского государственного технического университета

443100. г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8.