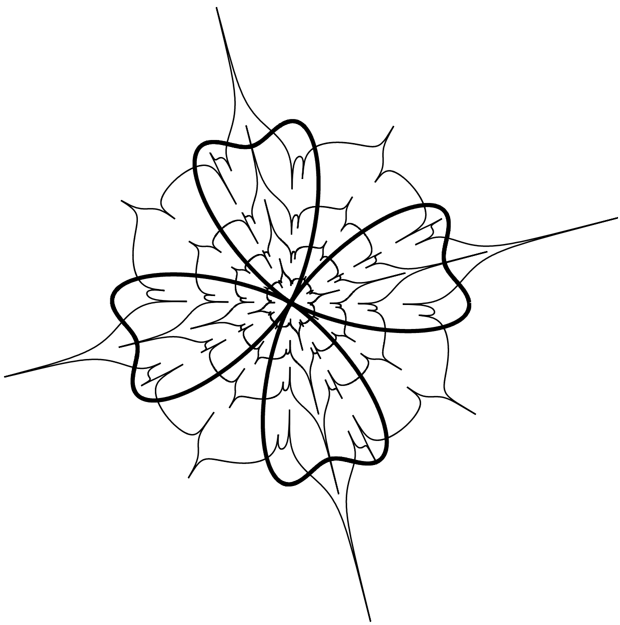
Г. А. ПАВЛОВА, С. В. ГОРБУНОВ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 1

Практикум



Самара 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Г. А. ПАВЛОВА, С. В. ГОРБУНОВ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть 1

Практикум

Самара 2012

Печатается по решению редакционно–издательского совета
Самарского государственного технического университета

УДК 517.91 (075.8)
П12

Павлова Г. А.
П12 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Часть 1: практикум/ *Г. А. Павлова, С. В. Горбунов* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2012. – 51 с.

Содержит 23 варианта по 15 задач, относящихся к следующим разделам курса дифференциальных уравнений: уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной; уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной; дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Приведён демонстрационный вариант с решениями всех типовых задач и методическими указаниями.

Типовой расчёт предназначен для самостоятельной работы студентов–бакалавров направления 010400 "Прикладная математика и информатика" по курсу "Дифференциальные уравнения".

УДК 517.91 (075.8)
П12

Рецензент: *к. т. н. Т. А. Бенгина*

Предисловие

Предлагаемый читателю практикум по дифференциальным уравнениям предназначен для студентов II курса специальности "Прикладная математика и информатика". Дифференциальные уравнения — одна из базовых дисциплин в общем образовании математика–прикладника, она вносит большой вклад в решение основной задачи математического образования — научить студента составлять математические модели реальных процессов. Целью данного пособия является формирование у студентов навыков решения обыкновенные дифференциальные уравнения и применения их при построении элементарных математических моделей. В первую часть практикума вошли простейшие дифференциальные уравнения первого порядка, уравнения, не разрешённые относительно производной, уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка, а также линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. При составлении пособия были использованы задачи из широко известных изданий [4–7, 9]; но в большинстве своём задачи являются оригинальными.

Пособие состоит из двух частей. В первой части приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов, во второй рассмотрен демонстрационный вариант с подробными решениями. В конце практикума дан список учебных пособий, из которых студент может почерпнуть сведения, необходимыедля решения поставленных перед ним задач.

На обложке: семейство ортогональных траекторий к "четырёхлистному клеверу" $\rho = 1 + \cos 4\varphi + \sin^2 4\varphi$.

Порядок выполнения и защиты учебного задания

Подробное и обоснованное решение задач необходимо представить в письменном виде, при этом нумерация задач должна совпадать с их нумерацией в учебном задании. Во время защиты студент должен ответить на теоретические вопросы, пояснить решения примеров из задания, решить подобные им задачи.

Условия задач

Студенту необходимо решить 15 задач, разделённых на пять разделов в зависимости от условия задачи. В **задаче №1 раздела I** надо определить область задания уравнения, область существования и единственности решения задачи Коши; изучить поле направлений, определяемое заданным ДУ, то есть найти изоклины, построить изоклины $y' = 0$, $y' = \pm 1$, $y' = \infty$, определить направление поля в точках, лежащих на осях координат, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление выпуклости и найти линии точек перегиба, сделать чертёж; выполнить схематический набросок семейства интегральных кривых; после этого проинтегрировать уравнение, найдя все решения; изучить поведение интегральных кривых в окрестности особых линий, на границе области задания уравнения и на бесконечности по аналитическому виду семейства интегральных кривых; сделать рисунок. В задачах, относящихся к **разделу II**, необходимо проинтегрировать заданные ДУ. В **разделе III** надо найти решение задачи Коши. В **разделе IV** найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать качественную картину поведения интегральных кривых данного ДУ. **Раздел V** представлен двумя задачами, содержащими практическое приложение ДУ.

Теоретические вопросы

1. Что называется обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ)? Что такое порядок ДУ?

2. Каковы основные формы задания ДУ первого порядка, разрешённого относительно производной?

3. Как в исследованиях возникают ДУ? Как составить ДУ заданного однопараметрического семейства кривых?

4. Что называется решением (интегральной кривой) ДУ? В чём состоит задача интегрирования ДУ? В каких видах могут быть заданы решения ДУ?

5. Как определить наклон интегральной кривой уравнения первого порядка в заданной точке $(x_0;\, y_0)$ по виду уравнения? Что такое поле направлений, определяемое ДУ? Что такое изоклины? Могут ли интегральные кривые уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной, пересекаться между собой? Могут ли они касаться друг друга?

6. В чём состоит задача Коши для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной? При каком условии такая задача имеет решение? При каких условиях это решение будет заведомо единственным?

7. Что такое общее решение? Как решается задача Коши при помощи формулы общего решения? Что такое общий интеграл?

8. Что такое частное решение? Как оно связано с формулой общего решения?

9. Какое решение называется особым? Как оно может быть связано с формулой общего решения? Как найти кривые, подозрительные на особое решение, по самому ДУ? В каком случае уравнение заведомо не имеет особых решений? Почему огибающая семейства интегральных кривых будет особым решением?

10. Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными?

11. Какое ДУ называется однородным? Какова особенность поля направлений, определяемого этим уравнением? Каково семейство

изоклин однородного уравнения? Как это уравнение интегрируется?

12. Какое ДУ называется линейным? При каком условии задача Коши для линейного уравнения имеет единственное решение? Может ли линейное уравнение иметь особые решения? В чём состоят метод Эйлера и метод Лагранжа нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения?

13. Как интегрируется уравнение Бернулли? При каком условии $y = 0$ будет решением; когда это решение является частным и когда особым?

14. Какой вид имеет уравнение Риккати? Как найти общее решение уравнения Риккати, если известно одно его частное решение? Какой вид имеет общее решение уравнения Риккати? Может ли уравнение Риккати иметь особое решение?

15. При каком условии уравнение $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ является ДУ в полных дифференциалах? Какой вид имеет его общий интеграл?

16. В чём состоит метод интегрирующего множителя? При каком условии существует интегрирующий множитель, зависящий:
    а) от заданной функции от x и y;
    б) только от x;
    в) только от y?

17. Какой вид имеет общее уравнение первого порядка? Когда оно называется уравнением n-ной степени?

18. Какой вид имеет уравнение Лагранжа? Как найти его общее решение в параметрической форме?

19. Какой вид имеет уравнение Клеро? Чем оно отличается от уравнения Лагранжа? Как написать его общее решение по виду уравнения? Как найти особое решение?

20. Как интегрируются ДУ первого порядка, разрешённые относительно искомой функции или независимой переменной?

21. Что такое изогональная (ортогональная) траектория семейства кривых? Как получить ДУ изогональных (ортогональных) тра-

екторий данного однопараметрического семейства кривых, исходя из ДУ этого семейства в случае декартовых и случае полярных координат?

22. Какой вид имеет уравнение n-го порядка, разрешённое относительно $y^{(n)}$? Что называется решением (интегральной кривой) уравнения? В каких формах оно может быть задано?

23. Как ставится задача Коши для ДУ n-го порядка, разрешённого относительно $y^{(n)}$? Какой геометрический и механический смысл имеет эта задача для ДУ второго и третьего порядков?

24. При каком условии задача Коши для ДУ n-го порядка имеет решение? Когда это решение будет заведомо единственным?

25. Какой вид имеет общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$?

26. Как найти общее решение уравнения $f\left(x,\, y^{(n)}\right) = 0$ в параметрической форме в случае, когда это уравнение допускает параметрическое представление в элементарных функциях?

27. Как понижается порядок уравнения вида $F\left(x,\, y^{(k)},\, y^{(k+1)},\, y^{(n)}\right) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n$?

28. Как понижается порядок уравнения, не содержащего независимой переменной?

29. Какой подстановкой понижается порядок уравнения, однородного относительно искомой функции и её производных?

30. Какое уравнение называется уравнением в точных производных? Какой вид имеет первый интеграл этого уравнения?

Часть 1. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

I. 1. $y' = -x^2.$

II. 2. $3e^x \operatorname{tg} y \, \mathrm{d}x + (2 - e^x) \sec^6 y \, \mathrm{d}y = 0.$

3. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2 - 4xy} = \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-y)^2}.$

4. $y' \left(2x \cos^2 y + e^y \sin 4y\right) = 1.$

5. $x(x-1)y' = \left(x^2 y - 1\right) y.$

6. $(\sin xy + xy \cos xy) \, \mathrm{d}x + x^2 \cos xy \, \mathrm{d}y = 0.$

7. $2\left(x\left(1 - y^2\right) + y\sqrt{1 - y^2}\right) \mathrm{d}x = \left(x^2 y - 2x\sqrt{1 - y^2}\right) \mathrm{d}y.$

8. $x\left((y')^2 - 1\right) = 2y'.$

9. $a^2 y^{IV} = y'', \quad a = \mathrm{const}.$

10. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}.$

11. $y\,(y')^2 + \dfrac{y^2 y''}{2} - x = 0.$

III. 12. $xy' + 2\sin^2 y = 3; \quad y(1) = \dfrac{\pi}{3}.$

IV. 13. $y = y' + \dfrac{x - \ln y'}{2}.$

V. 14. Найти кривую, для которой сумма длин отрезков касательной (от точки касания до пересечения с осью абсцисс) и подкасательной пропорциональна произведению координат точки касания.
Указание. Подкасательная — отрезок оси ox между точкой пересечения касательной с осью ox и проекцией точки касания на ось ox.

15. Изолированному проводнику сообщён заряд $Q_0 = 1000$ Кл. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени $t = 10$ мин., если за первую минуту потеряно 100 Кл.

Вариант 2

I. 1. $y' = 2\sqrt{y}$.

II. 2. $\left(e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} \sin y - xy\right) \mathrm{d}y = \mathrm{d}x$.

3. $3xy^2y' - x^3 - 2y^3 = 0$.

4. $\dfrac{2y-5}{x+1}y' = \sqrt{\dfrac{5-4y-4y^2}{x^2+2x+9}}$.

5. $\left(2xye^{x^2} - \arcsin 2x\right) \mathrm{d}x + \left(e^{x^2} + \operatorname{ch} 2y\right) \mathrm{d}y = 0$.

6. $y' = y\cos x \left(2y^2 \sin x - 1\right)$.

7. $\dfrac{\mathrm{d}y}{xy - xy^2 + y^4} = \dfrac{\mathrm{d}x}{0{,}5x^2 - 2xy^3 - y^3}$.

8. $y = \left(y'\right)^2 + 2\left(y'\right)^3$.

9. $y''' = \sqrt{1 + \left(y''\right)^2}$.

10. $xyy'' + x\left(y'\right)^2 - yy' = 0$.

III. 11. $\left(1 + \sin^2 3x\right) \mathrm{d}y - \left(e^{2y} + 1\right) \mathrm{d}x = 0; \quad y(0) = 0$.

12. $2yy'' - 3\left(y'\right)^2 = 4y^2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$.

IV. 13. $yy'\left(yy' - 1\right) = x - y^2$.

V. 14. Найти кривую, для которой треугольник, образованный осью oy, касательной и радиусом–вектором точки касания, равнобедренный.

15. С некоторой высоты брошено вертикально вниз тело массой m и с начальной скоростью v_0. Найти закон изменения скорости v падения этого тела, если на него действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости падения.

Вариант 3

I. 1. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$

II. 2. $\left(3x^5 \operatorname{tg} y - 2y^3\right)\,\mathrm{d}x + \left(x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

3. $y' \sin 2x = y \sin 3x.$

4. $y' x \cos^2 (\ln y - \ln x) = y.$

5. $\left(2xy + 1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}y.$

6. $\left(1 - y^2\right)\,\mathrm{d}x + x\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = 0.$

7. $(x + 2y)\, y' + 2x + 5y - 1 = 0.$

8. $y' + 2xy + 8x^3y^3 = 0.$

9. $ay'' = -\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}, \quad a = \mathrm{const}.$

10. $xy^{V} + 2y^{IV} = 0.$

III. 11. $y' + 2y = xe^{-(x+1)^2}; \quad y(0) = 0.$

12. $y\,(y'' - 2x) - 2\left(y' - x^2\right) y' = 0; \quad y|_{x=1} = \frac{1}{3}; \quad y'|_{x=1} = 1.$

IV. 13. $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y.$

V. 14. Найти кривую, для которой треугольник, образованный нормалью с осями координат, был бы равновелик треугольнику, образованному осью ox, касательной и нормалью.

15. Частица массой m брошена вертикально вверх со скоростью v_0. На неё действуют сила тяжести и сила сопротивления, равная $2kmv$. Найти время t достижения частицей наивысшего положения.

Вариант 4

I. 1. $y' = e^y.$

II. 2. $\left(y\sin 2x + xy^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(y^3 - \sin^2 x\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

3. $x\sqrt{1+y} + yy'\sqrt{1+4x+x^2} = 0.$

4. $\left(y^2 - \dfrac{xy}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{2y^2-x^2}{\sqrt{y^2-x^2}} + 2xy\right)\mathrm{d}y = 0.$

5. $y'\cos^2(2x+3y+1) = 1.$

6. $xyy' = y^2 + x^4\ln^2 x.$

7. $(2x+y+2)\,\mathrm{d}x - (4x+2y+9)\,\mathrm{d}y = 0.$

8. $y''y' = \left(1+(y')^2\right)^{\frac{1}{2}}.$

9. $\left(1+x^2\right)y'' + (y')^2 + 1 = 0.$

III. 10. $yy' - (y')^2 = y^2\ln y; \quad y(0) = y'(0) = 1.$

11. $xy' = y\,(\ln y - \ln x)\,; \quad y|_{x=1} = e.$

12. $2y'\cos^3 x + y\sin 2x\cos x = 2; \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

IV. 13. $x\,(y')^2 = y - y'.$

V. 14. Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого нормалью на оси ox (от начала координат), к радиусу–вектору точки касания есть величина постоянная, равная k.

15. За какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 2 м, вытечет из неё через круглое отверстие диаметром 0,2 м, вырезанное в дне чаши, если скорость вытекания воды $v = 0,6\sqrt{2gh}$ м/с, где h — высота столба воды над отверстием?

Вариант 5

I. 1. $y' = xy.$

II. 2. $(2x - 3y + 5)\,\mathrm{d}x + (5x + y + 4)\,\mathrm{d}y = 0.$

3. $(x \sin y + xy \sin x + 1)\,\mathrm{d}x + x\left(x \cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0.$

4. $\left(x^3 + y^2 e^y\right) y' = 3x^2.$

5. $y' x \ln x - y = x^3 \ln^4 x.$

6. $x\sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}x + y\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}y = 0.$

7. $y' - e^x y^2 + 3y = e^{-x}.$

8. $x(xy + 1)y'' + x^2\left(y'\right)^2 + (4xy + 2)y' + y^2 + 1 = 0.$

9. $x = e^{y''} - \left(y''\right)^2.$

10. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 + y^2 + 1} = -\dfrac{\mathrm{d}y}{xy}.$

III. 11. $e^y\left(1 + y'\right) = 1 + 2\,\mathrm{sh}\,y; \quad y(1) = \ln 2.$

12. $y''\sqrt{1 + y} = 1; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 0.$

IV. 13. $4x^6 y - x^7 y' + \dfrac{1}{8}\left(y'\right)^2 = 0.$

V. 14. Найти кривую, у которой отношение отрезка, отсекаемого касательной на оси oy, к отрезку, отсекаемому нормалью на оси ox, есть величина постоянная, равная k. Начала отрезков — точка $(0,\,0)$.

15. Пуля входит в доску толщиной h см со скоростью v_0 м/с, а выходит из доски со скоростью v_1 м/с. Определить время движения пули через доску, если известно, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости пули.

Вариант 6

I. 1. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

II. 2. $y' = x5^{2x+y}$.

3. $xy' = y + \sqrt{9y^2 - 6xy + 2x^2}$.

4. $y' = xy\left(x^2ye^{2x^2} - 2\right)$.

5. $y' = \sin(3x+2y) + 1$.

6. $y' - \cos x\left(\cos^2 x - y\right) = 0$.

7. $y\,\mathrm{d}x - \left(x + x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}y = 0; \quad \mu = \mu\left(\omega(x,\,y)\right)$.

8. $x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0$.

9. $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)\left(y'\right)^2 = 0$.

10. $y'' - xy''' + \left(y'''\right)^3 = 0$.

11. $x^2y'' + xy' = 1$.

III. 12. $\left(4x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(3xy + \dfrac{4}{3}\dfrac{x^3}{y}\right)\,\mathrm{d}y = 0; \quad y|_{x=1} = 3$.

IV. 13. $\left(y'\right)^2 + (2x+1)y' - y = 0$.

V. 14. Найти кривую, проходящую через точку $M(3;\,4)$ и обладающую следующим свойством: отрезок, отсекаемый любой её касательной на оси ординат (от начала координат), равен удвоенной длине радиуса–вектора точки касания.

15. Тяжёлая однородная цепочка массой m и длиной $2l$ лежит на гладком горизонтальном столе так, что половина её свешивается со стола. Определить закон движения цепочки во время её соскальзывания со стола и время соскальзывания.

Вариант 7

I. 1. $y' = \frac{y}{2x}$.

II. 2. $\left(\frac{y}{\cos^2 xy} + \sin x\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right) \mathrm{d}y = 0$.

3. $y'(3x^2 - 2x + 1) - y(2x + 1) = 0$.

4. $y' = 2e^x \left(y - \sqrt{y}e^x\right)$.

5. $y' = \operatorname{tg} y(1 - \cos x \sin y)$.

6. $(x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (2x + 2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$.

7. $\left(x^2 - y\right) \mathrm{d}x + \left(x^2y^2 + x\right) \mathrm{d}y = 0$.

8. $y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3$.

9. $yy'' - (y')^2 - (y')^4 = 0$.

10. $x^4y'' - x^2(xy' - y) - (xy' - y)^3 = 0$.

III. 11. $y' + \sin\frac{x + y}{2} = \sin\frac{x - y}{2}; \quad y|_{x=\frac{\pi}{3}} = \pi$.

12. $y''y^5 + 1 = 0; \quad y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y(0) = 1$.

IV. 13. $x\,(y')^2 = y' - \frac{3}{4}e^{-2y}$.

V. 14. Найти кривую, проходящую через точку $M(1;\,1)$ и обладающую следующим свойством: величина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, равна абсциссе точки касания.

15. Сосуд объёмом 30 л наполнен воздухом (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,2 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается с находящимся в сосуде воздухом. Из сосуда вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 90% азота?

Вариант 8

I. 1. $y' = \dfrac{1}{y}$.

II. 2. $2xyy' \ln x + y^2 = x \cos^3 \dfrac{x}{2}$.

3. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

4. $(2y - x + 1)\,\mathrm{d}x + (4y - 2x + 6)\,\mathrm{d}y = 0$.

5. $(xy - 3x + 5y - 15)\,\mathrm{d}x + (xy - 2x + y - 2)\,\mathrm{d}y = 0$.

6. $(xye^x + 2)\ \mathrm{d}x + \left(xe^x + \dfrac{x}{y}\right)\ \mathrm{d}y = 0$.

7. $\left(2x^2+y^2+2xy\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x+\left(xy+x^2\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y=0;\ \mu = \mu\left(\omega(x,y)\right)$.

8. $y' + e^{-x}y^2 + y = 3e^x$.

9. $x^2yy'' = (y + xy')^2$.

10. $y^{IV} = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{y'''}$.

11. $y'' = 2^{4y-1}$.

III. 12. $\cos(x-y)(\,\mathrm{d}x +\,\mathrm{d}y) = \cos(x+y)(\,\mathrm{d}x -\,\mathrm{d}y);\quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

IV. 13. $y' - \ln y' = y - x$.

V. 14. Найти кривую, в каждой точке которой поднормаль есть среднее арифметическое квадратов координат этой точки.
Указание. Поднормаль — отрезок на оси ox между точкой пересечения нормали с осью ox и проекцией точки пересечения нормали с кривой на ось ox.

15. На дне цилиндрического резервуара, наполненного жидкостью, образовалась щель. В течение первых суток вытекло 10% содержимого. Считая скорость истечения жидкости пропорциональной высоте уровня её в резервуаре, определить, через какое время из сосуда вытечет половина жидкости.

Вариант 9

I. 1. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}.$

II. 2. $\left(\dfrac{y^2}{x^2} + 1 + \dfrac{2}{x}\right)\,\mathrm{d}x + 2\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}y = 0.$

3. $y'\sin x = y\cos x\,\bigl(1 + y^2\sin x\cos^3 x\bigr).$

4. $\left(e^{(1-y)e^y} - xye^y\right)y' = 1.$

5. $y' = \sqrt{\dfrac{y-x}{y+x}} + \dfrac{y}{x}.$

6. $\left(4x\sqrt{y} + \dfrac{y^3}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{y}} + 6y^2\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

7. $e^{xyy'} = \ln x.$

8. $\left((2y+4x)\sqrt{1-xy} - y\right)\,\mathrm{d}x + \left((2x-4y)\sqrt{1-xy} - x\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

9. $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}.$

10. $yy'' - (y')^2 = y''y^2.$

III. 11. $(1+e^x)\,yy' = e^{2x} + 3;\quad y|_{x=0} = \sqrt{2}.$

12. $y^2y''' = (y')^3;\quad y(0) = -1;\quad y'(0) = 0;\quad y''(0) = \dfrac{3}{2}.$

IV. 13. $y + (y')^2\cos^4 x = y'\sin x\cos x,\quad |x| < \dfrac{\pi}{2}.$

V. 14. Найти кривые, для которых длина отрезка нормали (от точки кривой до пересечения с осью абсцисс) равна длине радиуса–вектора точки касания.

15. В баке находится 60 л раствора, содержащего 5 кг соли. В бак непрерывно подаётся вода со скоростью 3 л/мин, которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через 1 час?

Вариант 10

I. 1. $y' = -\sqrt{2-y}$.

II. 2. $2xy' = y + \dfrac{2x}{1+\sqrt[6]{x}}$.

3. $(2x-y)\,\mathrm{d}x + (x-2y-3)\,\mathrm{d}y = 0$.

4. $(xy + y\ln y)\,\mathrm{d}x + (x + y\sin y)\,\mathrm{d}y = 0$.

5. $x^2yy' + \cos y = 1$.

6. $\left(ye^{-\frac{x}{y}} - xe^{-\frac{x}{y}} + x^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(xe^{-\frac{x}{y}} + \dfrac{x^2e^{-\frac{x}{y}}}{y} + y^2\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

7. $y + x\left(2 - 3y^3\sqrt[3]{x}\right)y' = 0$.

8. $yy'' + 4y' = (y')^2$.

9. $y''y' = \sqrt{1+(y')^2}$.

10. $\left(x^2+1\right)\left((y')^2 - yy''\right) - xyy' = 0$.

11. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0$.

III. 12. $yy' = \sqrt{1+y^2}\cos\ln x;\quad y(1) = 0$.

IV. 13. $2x^2y - x^3y' - 2\,(y')^2 = 0$.

V. 14. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(-1;\,2)$ и обладающую следующим свойством: точка пересечения любой её касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

15. Однородная цепь длиной 6 м соскальзывает вниз со стола без трения. Если движение начинается с момента, когда 1 м цепи свисает, то за какое время соскользнёт вся цепь?

Вариант 11

I. 1. $y' = 2xy.$

II. 2. $(\cos x \sin 2y - y \sin x)\ \mathrm{d}x + \cos x\,(2x \cos 2y + \ln \cos x + 2y)\ \mathrm{d}y = 0.$

3. $\left(1+y^2\right)\ \mathrm{d}x = \left(\sqrt{1+y^2}\cos 3y - 3xy\right)\ \mathrm{d}y.$

4. $(4y + x + 1)^2 y' = 1.$

5. $x^3 y' = \ln^3 x \operatorname{ch} y.$

6. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x - y - 5} = \dfrac{\mathrm{d}y}{2x + y - 1}.$

7. $\left(3\sqrt{x-y} - 2x\right)\ \mathrm{d}x = \left(3\sqrt{x-y} - 2y\right)\ \mathrm{d}y.$

8. $xyy'' - x\left(y'\right)^2 = yy'.$

9. $y' = y^2 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$

III. 10. $x\left(y'' + \left(y'\right)^2\right) = \left(y'\right)^2 + y'; \quad y'|_{x=1} = 2; \quad y|_{x=1} = 1.$

11. $x^3 yy' - \sin y = 1; \quad y|_{x=1} = 0.$

12. $yy'' + 1 = \left(y'\right)^2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = \sqrt{2}.$

IV. 13. $4\left(y'\right)^3 - 3x^2 y' + 4xy = 0.$

V. 14. Найти кривую, обладающую следующим свойством: середина отрезка, отсекаемого на оси абсцисс касательной и нормалью к кривой в любой её точке, есть постоянная точка.

15. Моторная лодка движется по озеру со скоростью 20 км/ч. Через 40 с после выключения её мотора скорость лодки уменьшается до 8 км/ч. Определить скорость лодки через 2 мин. после выключения мотора, если сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна её скорости.

Вариант 12

I. 1. $y' = -\dfrac{2y}{x}$.

II. 2. $\left(xy - xy^2 + y^4\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy^3 + y^3 - \dfrac{x^2}{2}\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

3. $xy' = y\cos(\ln y - \ln x)$.

4. $\left(y'\right)^2 + \left(4y^2 - 1\right)\sqrt{\arcsin 2y - 1} = 0$.

5. $xy' - y^2\ln^3 x + y = 0$.

6. $\left(xy^2 - x\right)\,\mathrm{d}x + \left(\sqrt{y} + x\sqrt{2y}\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

7. $e^{\frac{y}{x}}\left(1 - \dfrac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}x + \left(1 + e^{\frac{y}{x}}\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

8. $x^2yy'' - x^2\left(y'\right)^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0$.

9. $y(1+\ln y)y'' + (1-\ln y)\left(y'\right)^2 = 0$.

10. $y' + y^2 = \dfrac{1}{x^4}$.

11. $(2x - 3y + 7)\,\mathrm{d}x + (3x - 2y + 3)\,\mathrm{d}y = 0$.

III. 12. $y'' = y'\operatorname{tg} x + \sec^5 x; \quad y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$.

IV. 13. $\left(y'\right)^2 + 2xy' - x^2 - 4y = 0$.

V. 14. Найти кривую, проходящую через точку $M(2; 3)$ и обладающую свойством: отрезок нормали в любой точке кривой, заключённый между осями координат, делится этой точкой в отношении $1 : 2$.

15. Ракета пущена вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сопротивление воздуха замедляет её движение, сообщая ракете отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату её скорости. Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

Вариант 13

I. 1. $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$.

II. 2. $y \sin\dfrac{x}{y}\,\mathrm{d}x + \left(y - x\sin\dfrac{x}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$.

3. $(x+1)\,(yy' - \ln x) = y^2$.

4. $y' - x + x^3 e^{-\left(x^2+y\right)} = 0$.

5. $y' = e^x\,(\cos(x+y) + \cos(x-y))$.

6. $x\left(\ln\left(x^2+y^2\right) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y + y\left(\ln\left(x^2+y^2\right) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x = 0$.

7. $(3x - 7y - 2)\,\mathrm{d}y = (4x + y - 13)\,\mathrm{d}x$.

8. $x^3 - (y')^3 = xy'$.
Указание. Сделать подстановку $y' = tx$.

9. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{(y')^2}{y}$.

10. $yy'' = 3\,(y')^2$.

11. $(e^x + 1)\,y''' + y'' = 0$.

III. 12. $\sqrt{y - y^2}\ln x = xy'\ln 2x; \quad y|_{x=1} = 0{,}5$.

IV. 13. $x^5\,(y')^3 + x^4 y\,(y')^2 - 1 = 0$.

V. 14. Найти кривую, проходящую через точку $M(1;\,3)$ и обладающую свойством: отрезок нормали в любой точки кривой, заключённый между осями координат, делится этой точкой пополам.

15. Дно резервуара вместимостью 300 л покрыто солью. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг соли на 3 л воды) и что данное количество чистой воды растворяет $\frac{1}{3}$ кг соли в минуту, найти, сколько соли будет содержать раствор по истечении часа.

Вариант 14

I. 1. $y' = \dfrac{y}{x-1}$.

II. 2. $y\,\mathrm{d}x + \left(xy^3 + x\ln x\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

3. $(2x-1)\sqrt{1-4y-y^2}\,\mathrm{d}x = \left(3x^2+x-2\right)(y+1)\,\mathrm{d}y$.

4. $xy'\sin x + (\sin x - x\cos x)y = 0{,}5\sin 2x - x$.

5. $(x+y)\,(y'+2) = 2y'+1$.

6. $y(y-1) = xy'\left(y^2x-1\right)$.

7. $(y-x)\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$.
Указание. Сделать замену $x = \operatorname{tg}\varphi$, $y = \operatorname{tg}\psi$.

8. $yy'' = \left(y^3+y'\right)y'$.

9. $y'''x\ln x = y''$.

10. $y' = \dfrac{1}{5}y^2 + \dfrac{6}{5}\dfrac{1}{x^2}$.

III. 11. $yy''' = y'y''$; $\quad y|_{x=0} = y''|_{x=0} = 1$; $\quad y'|_{x=0} = \sqrt{2}$.

12. $y'\operatorname{ch}2x\operatorname{tg}y = e^{4x}-7$; $\quad y|_{x=0} = 0$.

IV. 13. $x = \dfrac{y}{y'}\ln y - \left(\dfrac{y'}{y}\right)^2$.

V. 14. Найти кривую, обладающую следующим свойством: абсцисса центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат, этой кривой и ординатой любой её точки, равна $\frac{3}{4}$ абсциссы этой точки.

15. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении минуты вращался со скоростью 60 об/мин.

Вариант 15

I. 1. $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

II. 2. $xy' = \sqrt{y^2 + xy}$.

3. $y = \dfrac{(14 - x)y' - 2x - 5}{4y' - 3}$.

4. $y^2 \cos xy \, \mathrm{d}x + (\sin xy + xy \cos xy) \, \mathrm{d}y = 0$.

5. $\left(2xy + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}\right) \mathrm{d}x + \left(1 - \dfrac{y}{x}\right) \mathrm{d}y = 0$.

6. $y = y' \left(x^2 \ln y - x\right)$.

7. $y^3 + (y')^3 - 3ayy' = 0$.
Указание. Сделать подстановку $y' = ty$.

8. $y'y''' = 2\,(y'')^2$.

9. $yy'' = y' + (y')^2$.

10. $2xy' - y - 6y^2 = x$.

11. $2yy' - \operatorname{tg} x = e^{-y^2} \sin 2x$.

III. 12. $\left(1 + x + x^2\right) y' - xy = xy^2; \quad y(0) = 1$.

IV. 13. $y = y' \operatorname{cth} x - (y')^2 \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

V. 14. Найти кривую, проходящую через точку $M(1;\,2)$ и обладающую следующим свойством: отрезок, отсекаемый (от начала координат) на оси ординат нормалью в любой точки кривой, равен расстоянию до этой точки от начала координат.

15. Начальная температура тела ϑ_0°C равна температуре окружающей среды. Тело получает тепло от нагревательного прибора (скорость подачи тепла является заданной функцией времени: $c\varphi(t)$, где c — постоянная теплоёмкость тела). Кроме того, тело отдаёт тепло окружающей среде (скорость охлаждения пропорциональна разности между температурами тела и среды). Найти зависимость температуры тела от времени, отсчитываемого от начала опыта.

Вариант 16

I. 1. $y' = \dfrac{x}{4y}$.

II. 2. $xy' \sin^2(\ln y - \ln x) = y$.

3. $y' = \sqrt[3]{2x + 3y + 1}$.

4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{4\sin^3 x \cos x}{\sin^4 x \cos y + a \sin 2y}$; $\quad a = \mathrm{const}$.

5. $y\left(x^3 + x - 2\right) \operatorname{ch}^2 y \, \mathrm{d}y = (3x + 1)\, \mathrm{d}x$.

6. $\left(3y^5 \operatorname{tg} x - 2x^3\right)\, \mathrm{d}y + \left(y^6 \sec^2 x + 4x^3y^3 + 3x^2y\right)\, \mathrm{d}x = 0$.

7. $(2x - y - 2)\, \mathrm{d}x + (x + y - 4)\, \mathrm{d}y = 0$.

8. $xyy'' + x\,(y')^2 = 2yy'$.

9. $4x^2\left(y' + y^2\right) + 1 = 0$.

10. $xyy' - y^2 = \dfrac{\left(x^2 + y^2\right)x}{y - x}$.

11. $\left(6xy^2 - 21y^2 + 8x - 28\right)\, \mathrm{d}x + \left(2x^2y + 4x^2 - 10y - 20\right)\, \mathrm{d}y = 0$.

III. 12. $yy'' + (y')^2 = e^y y'$; $\quad y|_{x=1} = 1$; $\quad y'|_{x=1} = e$.

IV. 13. $xy^4y' + 3y^5 + (y')^4 = 0$.

V. 14. Найти кривую, обладающую свойством: площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиусом–вектором точки касания, постоянна.

15. Разность потенциалов на зажимах катушки равномерно падает от $E_0 = 2$ В до $E_1 = 1$ В в течение 10 с. Каков будет ток в конце десятой секунды, если в начале опыта он был равен $16\frac{2}{3}$ А? Сопротивление катушки $R = 0{,}12$ Ом, коэффициент индуктивности $L = 0{,}1$ Гн.

Вариант 17

I. 1. $y' = y^2.$

II. 2. $y'\left(x^3 \sin 2y - x \cos y\right) = 1.$

3. $y' = \sin^2(2x + 3y + 1).$

4. $\left(2xy + \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) \mathrm{d}x + \left(2x^2 - \dfrac{x}{y\left(x^2 + y^2\right)}\right) \mathrm{d}y = 0.$

5. $y^2 = xyy' - x^2 \sqrt[x]{e^y}.$

6. $y' = y^2 + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^8}}.$

7. $(2x + y - 3)y' + y + 1 = 0.$

8. $2yy'' - 3\left(y'\right)^2 = 4y^2.$

9. $y\left(2x^2 - 3x + 1\right) \mathrm{d}y + x\sqrt{1 - y - y^2}\, \mathrm{d}x = 0.$

10. $y'y''' = \left(y''\right)^2 - \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2.$

11. $\left(1 + xy^2 e^{x^2 y^2}\right) \mathrm{d}x + \left(1 + x^2 y e^{x^2 y^2}\right) \mathrm{d}y = 0.$

III. 12. $xy' \sin 2y + x^2 = \sin^2 y; \quad y|_{x=1} = \dfrac{\pi}{2}.$

IV. 13. $\left(y'\right)^2 - yy' + e^x = 0.$

V. 14. Найти кривую, обладающую свойством: отрезок, отсекаемый касательной на оси абсцисс (от начала координат), равен квадрату ординаты точки касания.

15. Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах 10 кг соли. Подвергая его действию 90 л воды, нашли, что в течение 1 ч растворилась половина содержащейся в ней соли. Сколько соли раствориться в течение 2 ч от начала опыта? Скорость растворения пропорциональна количеству ещё не растворившейся соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг на 3 л).

Вариант 18

I. 1. $y' = \sqrt{1-y^2}$.

II. 2. $\left(4x^2y - 6x^3\right)\,\mathrm{d}x + \left(x^3 + y^3\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

3. $(2x - y - 1)\,\mathrm{d}x + (5 - 3x - 2y)\,\mathrm{d}y = 0$.

4. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{xy}} = 0$.

5. $\left(1 + 2\dfrac{x}{y} - \dfrac{\sin xy}{y}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x^2}{y^2} + 2\dfrac{x}{y} - \dfrac{x\sin xy}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$.

6. $e^{2x}y' + 4e^{2x}y = \cos 3x$.

7. $(y - 3x + 2)\,\mathrm{d}x + (3x - y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$.

8. $5\left(y'''\right)^2 - 3y''y^{IV} = 0$.

9. $\left(x^2+1\right)y''' - 2xy'' = 0$.

10. $x^2yy'' + x^2\left(y'\right)^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0$.

11. $y'' + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y' \cos^2 y' = \sin 2x \cos^2 y'$.

III. 12. $y' = x^2 2^{2x+y-3}$; $\quad y|_{x=0} = 0$.

IV. 13. $y = xy' + \sqrt{a^2\left(y'\right)^2 + b^2}$; $\quad a,\, b = \mathrm{const}$.

V. 14. Найти кривую, обладающую свойством: отрезок, отсекаемый любой её касательной на оси ординат (от начала координат), равен полусумме координат точки касания.

15. Пуля входит в доску толщиной $h = 10$ см со скоростью $v_0 = 200$ м/с, а вылетает из доски, пробив её, со скоростью $v_1 = 80$ м/с. Принимая, что сила сопротивления доски пропорциональна квадрату скорости движения пули, найти время движения пули через доску.

Вариант 19

I. 1. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.

II. 2. $\left(\sqrt{xy} - \sqrt[6]{x^3y}\right)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$.

3. $\left(3y^2 + 3xy + x^2\right)\,\mathrm{d}x - \left(x^2 + 2xy\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

4. $y' = \dfrac{y^3}{2\left(xy^2 - x^2\right)}$.

5. $\left(\dfrac{\sin xy}{x} + y\cos xy\right)\mathrm{d}x + x\cos xy\,\mathrm{d}y = 0$.

6. $(x+1)yy' + y^2 = \sqrt{x+2}$.

7. $2(x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x) + 3\dfrac{x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^3 + y^3}} = 0$.

8. $e^{y''} + y'' = x$.

9. $y''y + 2y^2\left(y'\right)^2 + \left(y'\right)^2 = \dfrac{2yy'}{x}$.

10. $4xy' = 2y + 5y^2 + x$.

III. 11. $\operatorname{ch} y\,\mathrm{d}x - (1 + x\operatorname{sh} y)\,\mathrm{d}y = 0; \quad y|_{x=1} = \ln 2$.

12. $\left(y'\right)^2 + 2yy'' = 1; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$.

IV. 13. $12yy' = 9x\left(y'\right)^2 + 4\sqrt[3]{x}$.

V. 14. Какая линия обладает следующим свойством: угол, составляемый с осью ox касательной к линии в любой её точке, вдвое больше угла, который составляет с той же осью полярный радиус точки касания.

15. Напряжение и сопротивлениие цепи равномерно меняются в течение минуты соответственно от нуля до 120 В и от нуля до 120 Ом. Индуктивность цепи постоянна (1 Гн). Начальный ток I_0. Найти зависимость между током и временем в течение первой минуты.

Вариант 20

I. 1. $y' = y - x.$

II. 2. $xy' = y + x\operatorname{tg}^6 \dfrac{2y}{x}.$

3. $4x^3\,\mathrm{d}x + \left(2x^4\operatorname{ctg} y - y^2\operatorname{cosec}^2 y\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

4. $\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \sqrt{1-x}\operatorname{arctg}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = 0.$

5. $y' + y^2 - 2y\cos x + \sin x + \cos^2 x = 0.$

6. $\left(xy^2 - 2y\sqrt{1-x^2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\left(y\left(1-x^2\right) + x\sqrt{1-x^2}\right)\,\mathrm{d}y.$

7. $y'x\cos y\left(2x^2\sin y - 1\right) = 1.$

8. $\cos y'' + y'' = x.$

9. $yy'' + (y')^2 + \dfrac{2}{x}yy' - \dfrac{1}{x^2} = 0.$

10. $y'' = e^{2y}.$

11. $ay'' = -\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}; \quad a = \mathrm{const}.$

III. 12. $yy' + y^2 = xe^{-(x+1)^2}; \quad y(0) = 0.$

IV. 13. $\dfrac{y}{xy'} + \ln y' = 1.$

V. 14. Кривая проходит через точку (1; 2). Каждая касательная к этой кривой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. Найти данную кривую.

15. Некоторое количество нерастворимого вещества, содержащее в своих порах 2 кг соли, подвергается действию 30 л воды. Через 5 мин. 1 кг соли растворяется. За какое временя растворится 99% первоначального количества соли? Скорость растворения пропорциональна количеству ещё не растворившейся соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг на 3 л).

Вариант 21

I. 1. $y' = x + y.$

II. 2. $\left(x\sin 2y + x^2y\right)\,\mathrm{d}y + \left(x^3 - \sin^2 y\right)\,\mathrm{d}x = 0.$

3. $y'\sin^2(x + 2y - 3) = 1.$

4. $xy' + y\ln y = y(\ln y \cdot \ln x)^2.$

5. $\dfrac{\mathrm{d}x}{x - 2y - 3} = \dfrac{\mathrm{d}y}{3x + 2y - 1}.$

6. $y'\left(x\ln 2 + 2^{\sin y}\sin^2\dfrac{y}{2}\right) = 1.$

7. $(y'')^2 + 2xy'' - y' = 0.$

8. $\left(\sqrt{x^2 - y} + 2x\right)\,\mathrm{d}x - \,\mathrm{d}y = 0; \quad \mu = \mu\left(\omega(x,\, y)\right).$

9. $x^2\left(3yy' + 2x\left(y'\right)^2 + 2xyy''\right) = 1.$

10. $yy'' + 1 = \left(y'\right)^2.$

11. $\left(1 + x^2\right)y'' + \left(y'\right)^2 + 1 = 0.$

III. 12. $(\sin 2x - \sin x)y^2 = y' + y\sin x; \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$

IV. 13. $2xy\left(y'\right)^2 = 4x^3 + \left(x^2 + 1\right)\left(y'\right)^3.$

V. 14. Найти кривую, проходящую через точку $M(2;\,3)$ и обладающую свойством: площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной точки кривой и касательной к кривой в этой точке, равна половине квадрата её абсциссы.

15. Материальная точка массы 1 г отталкивается вдоль прямой от некоторого центра с силой, пропорциональной её расстоянию от этого центра (коэффициент пропорциональности равен 4). Сопротивление среды пропорционально скорости движения (коэффициент пропорциональности равен 3). В начале движения расстояние от центра равно 1 см, а скорость — нулю. Найти закон движения.

Вариант 22

I. 1. $y' = y - 3x.$

II. 2. $x\left(y - \sqrt{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x + \left(1+x^2\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

3. $x^2 y\,\mathrm{d}x + \left(1+x^6\right)\sqrt{1-2y}\,\mathrm{d}y = 0.$

4. $y' = x + \dfrac{x^3}{y}.$
Указание. Свести уравнение к однородному с помощью замены $y = z^m$.

5. $\left(y^2-1\right)\,\mathrm{d}x - y\left(x + \left(y^2-1\right)\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

6. $\left(x^3 - xy^2 - y\right)\,\mathrm{d}x + \left(x^2y - y^3 + x\right)\,\mathrm{d}y = 0; \quad \mu = \mu\left(\omega(x,\,y)\right).$

7. $y' = x^2 - 2xy + y^2.$

8. $\left(1+y^2\right)y'' = y\left(\left(y'\right)^2 - 1\right).$

9. $xyy'' + x\left(y'\right)^2 = 3yy', \quad x \neq 0.$

10. $xy''' = \ln 2x.$

III. 11. $y''\sin^3 x - \left(y'\sin^2 x + \left(y'\right)^2\right)\cos x = 0; \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0; \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

12. $y' = \left(y + y^4\right)\operatorname{th} x; \quad y(0) = 1.$

IV. 13. $\left(y'\right)^2 + 4e^{-3x}y' + 6e^{-3x}y = 0.$

V. 14. Найти линию, для которой отношение расстояния от нормали в любой её точке до начала координат к расстоянию от той же нормали до точки $(a,\,b)$ равно постоянному значению k.

15. Электрическая цепь содержит сопротивление R и имеет коэффициент самоиндукции L. В настоящий момент ток в цепи отсутствует. В цепь подаётся внешнее напряжение $V(t) = V_0\frac{t}{T}$, где $T = \frac{L}{R}$. Найти зависимость $I(t)$ силы тока в цепи от времени.

Вариант 23

I. 1. $y' = 2x - 2y - 1.$

II. 2. $3x^2\,\mathrm{d}x - \left(x^3 + y + 1\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

3. $x^2y' = x^2y^2 + 3xy + 3.$

4. $y' = e^{x-y}\cos x + \operatorname{tg} x.$

5. $(2x - 3y - 1)\,\mathrm{d}x + (3x - 4y - 2)\,\mathrm{d}y = 0.$

6. $\left(y^3\cos xy + y\sin\dfrac{2x}{y}\right)\,\mathrm{d}x + \left(xy^2\cos xy - x\sin\dfrac{2x}{y}\right)\,\mathrm{d}y = 0.$

7. $(xy - y)\,\mathrm{d}x + (x^2y^2 + 2x^2y + y^2 + 2y + x^2 + 1)\,\mathrm{d}y = 0.$

8. $x^2y'' = 2y'(y - x); \quad x \neq 0.$

9. $(y + 1)y'' + \dfrac{y'}{y + 1} = (y')^2.$

10. $\left(1 + y^2\right)y'' + 2y\,(y')^2 = y'.$

III. 11. Для уравнения $\left(1 - x^2y\right)\,\mathrm{d}x + x^2(y - x)\,\mathrm{d}y = 0$ найти интегральную кривую, пересекающую прямую $x = \frac{1}{2}$ под прямым углом.

12. $x^2y''' - y'' = x^2\cos x; \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0; \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1; \quad y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

IV. 13. $3\,(y')^2 - 4e^{2x}y' + 4ye^{2x} = 0.$

V. 14. Найти в полярных координатах уравнение такой кривой, в каждой точке которой тангенс угла, образованного радиусом–вектором с касательной, равен квадрату радиуса–вектора.

15. Ветер, проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, теряет скорость. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости ветра в начале этого пути и его длине. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 м, зная, что начальная его скорость была 12 м/с; после прохождения в лесу пути $S = 1$ м скорость уменьшилась до 11,8 м/с.

Часть 2. Методические указания к решению задач

Студенту предлагается решить следующий типовой вариант учебного задания и сверить свои результаты с приведёнными ниже.

I. 1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x(1-y)$.

II. 2. $(3x - 4y + xy - 12)\,\mathrm{d}x + (30x - 2y - 3xy + 20)\,\mathrm{d}y = 0$.

3. $(2x + y + 1)\,\mathrm{d}x = (4x + 2y - 3)\,\mathrm{d}y$.

4. $y' = \dfrac{y \ln y}{x + y^3 \ln^4 y}$.

5. $\left(3y^2 - x\right)\,\mathrm{d}x + 2y\left(y^2 - 3x\right)\,\mathrm{d}y = 0; \quad \mu = \mu\left(\omega(x,\, y)\right)$.

6. $2y' + x = 4\sqrt{y}$.

7. $\left(xye^{-\frac{y}{x}} + y^2e^{-\frac{y}{x}} + x^3\right)\,\mathrm{d}x + x\left(xe^{-\frac{y}{x}} - ye^{-\frac{y}{x}} - y^2\right)\,\mathrm{d}y = 0$.

8. $4xy'' - \left(y''\right)^2 = 4\left(y' + 1\right)$.

9. $x^2\left(2yy'' - \left(y'\right)^2\right) + 2xyy' = 0$.

10. $y' = y^2 - xy - x$.

11. $6y''y^{IV} - 5\left(y'''\right)^2 = 0$.

III. 12. $3y'y'' = e^y; \quad y|_{x=-3} = 0; \quad y'|_{x=-3} = 1$.

IV. 13. $1 + yy' + y' \ln y' = xy'$.

V. 14. Кривая $y = y(x)$ проходит через начало координат. Середина отрезка её нормали, заключённого между точкой кривой и осью абсцисс, лежит на параболе $y^2 = ax$. Составить уравнение указанной кривой.

15. Капля воды, имеющая начальную массу M_0 г и равномерно испаряющаяся со скоростью m г/с, свободно падает в воздухе. Сила сопротивления пропорциональна скорости движения капли. Най-

ти зависимость скорости движения капли от времени, протёкшего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли была равна нулю.
Указание. Действующая сила F равна $\frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t}$, где M — масса (переменная величина, зависящая от времени t); v — скорость.

Решение задачи 1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x(1-y).$$

Область задания уравнения — вся плоскость $(x,\, y)$. Область существования и единственности решения задачи Коши — также вся плоскость, так как правая часть уравнения — функция $f(x,y) = 2x(1-y)$ и её частная производная по y непрерывны во всей плоскости $(x,\, y)$. Таким образом, интегральные кривые не могут ни пересекаться, ни касаться.

Семейство изоклин для данного ДУ определяется уравнением $2x(1-y) = k$, где $k \in \mathbb{R}^1$. Изоклина $y' = 0$ получается при $k = 0$, т. е. $x = 0$ и $y = 1$. Прямая $y = 1$ является интегральной кривой, так как функция $y = 1$ есть решение ДУ. Интегральные кривые пересекают ось ординат $x = 0$ под прямым углом, то есть касательные к ним параллельны оси абсцисс. Это означает, что точки прямой $x = 0$ являются точками экстремума для интегральных кривых.

Обратим внимание, что при $y > 1$ и $x > 0$, а также при $y < 1$ и $x < 0$ производная $y' < 0$, значит в этих частях плоскости интегральные кривые убывают; при $y > 1$ и $x < 0$, а также при $y < 1$ и $x > 0$ интегральные кривые возрастают. Таким образом, точки оси ординат, для которых $y > 1$, являются точками максимума, а точки оси ординат, для которых $y < 1$ — точками минимума.

Изоклины $y' = \pm 1$ получаются при $k = \pm 1$ и являются гиперболами $y = \mp \frac{1}{2x}$. Касательные, проведённые к интегральным кривым в точках пересечения с этими гиперболами, образуют с осью абсцисс углы 45° и 135° соответственно.

Вычислим вторую производную:

$$y'' = (2x(1-y))' = 2(1-y) + 2x(-y') =$$
$$= 2(1-y) - 2x\,(2x(1-y)) = 2(1-y)\left(1 - 2x^2\right).$$

Таким образом, точки прямых $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ являются точками перегиба интегральных кривых, при этом при $y < 1$ и $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и при $y > 1$ и $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ интегральные кривые выпуклы вниз.

Полученной информации достаточно для построения интегральных кривых исходного уравнения (рис. 1).

Проинтегрируем уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y} = 2x\,\mathrm{d}x,$$

$$-\ln|y-1| = x^2 + \ln|c|, \quad c \neq 0,$$

$$\ln|y-1| = -x^2 + \ln|c|,$$

$$y = 1 + ce^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}^1.$$

При $x \to \pm\infty$ интегральные кривые приближаются асимптотически к прямой $y = 1$.

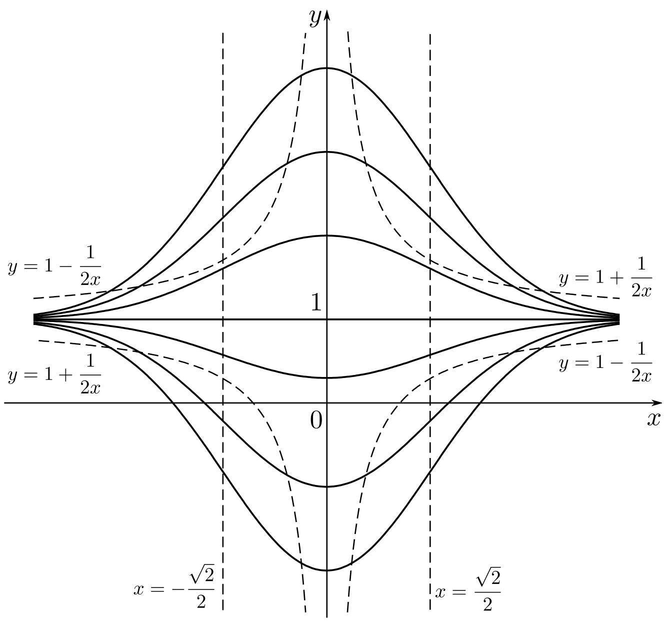


Рис. 1.

Решение задачи 2

$$(3x - 4y + xy - 12)\,\mathrm{d}x + (30x - 2y - 3xy + 20)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Очевидно, что данное уравнение не является ни однородным, ни линейным как относительно $y(x)$, так и относительно $x(y)$. Попытка свести это уравнение к ДУ в полных дифференциалах оказывается безуспешной. Если же сгруппировать слагаемые в выражениях при $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ и представить эти выражения в виде произведений некоторых множителей, то можно будет разделить переменные. Действительно, в результате таких преобразований имеем:

$$(y+3)(x-4)\,\mathrm{d}x + (10-y)(3x+2)\,\mathrm{d}y = 0,$$

$$\frac{x-4}{3x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{10-y}{y+3}\,\mathrm{d}y = 0 \quad \begin{pmatrix} 3x+2 \neq 0, \\ y+3 \neq 0 \end{pmatrix}.$$

Проинтегрировав, получим общее решение ДУ

$$\frac{x-3y}{3} - \frac{14}{9}\ln|3x+2| + 13\ln|y+3| = C.$$

$y = -3$ и $x = -\frac{2}{3}$ — частные решения дифференциального уравнения.

Решение задачи 3

$$(2x + y + 1)\,\mathrm{d}x = (4x + 2y - 3)\,\mathrm{d}y \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3} \quad (4x + 2y - 3 \neq 0).$$

Это уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$. Однако следует заметить, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому исходное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = 2x + y$. Тогда $y' = z' - 2$, и уравнение принимает вид

$$z' - 2 = \frac{z+1}{2z-3} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{5z-5}{2z-3}.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим общее решение ДУ:

$$\frac{2z-3}{z-1}\,\mathrm{d}z = 5\,\mathrm{d}x \quad (z-1\neq 0);$$

$$2(2x+y) - \ln|2x+y-1| = 5x + C;$$

$2x+y-1=0$ — частное решение ДУ.

Но если записать общее решение в другом виде, а именно $2x+y-1 = Ce^{-x+2y}$, то частное решение $2x+y-1=0$ войдёт в общее при $C=0$. Поэтому ответ записываем в более компактной форме:

$$2x+y-1 = Ce^{-x+2y}, \quad C\in\mathbb{R}^1.$$

Решение задачи 4

$$y' = \frac{y\ln y}{x+y^3\ln^4 y} \quad (y>0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y\ln y}{x+y^3\ln^4 y} \quad \Rightarrow$$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{x+y^3\ln^4 y}{y\ln y}$ — линейное уравнение относительно $x=x(y)$. Применяем подстановку Эйлера $x(y)=u(y)v(y)$:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y\ln y} = y^2\ln^3 y.$$

В качестве функции $v(y)$ выбираем одно из решений уравнения

$$v' - \frac{v}{y\ln y} = 0,$$

например, $v=\ln y$.

Функцию $u(y)$ находим из уравнения $du = y^2\ln^2 y\,\mathrm{d}y$, откуда $u(y) = \displaystyle\int y^2\ln^2 y\,\mathrm{d}y$. Интеграл берётся с помощью двукратного применения формулы интегрирования по частям.

$$u(y) = \frac{y^3}{27}\left(9\ln^2 y - 6\ln y + 2\right) + C.$$

Общее решение уравнения:

$$x(y) = \frac{y^3\ln y}{27}\left(9\ln^2 y - 6\ln y + 2\right) + C\ln y.$$

Решение задачи 5

$$\left(3y^2 - x\right)\,\mathrm{d}x + 2y\left(y^2 - 3x\right)\,\mathrm{d}y = 0; \quad \mu = \mu\left(\omega(x,\, y)\right).$$

Исходя из вида ДУ, предположим, что $\omega(x,\, y) = x + y^2$. Запишем ДУ для функции $\mu(\omega)$:

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial\omega} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

В нашем случае $M(x,\, y) = 3y^2 - x$; $N(x,\, y) = 2y\left(y^2 - 3x\right)$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -6y; \quad \frac{\partial\omega}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = 2y.$$

Составим ДУ относительно $\mu(\omega)$:

$$\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial\omega} = -\frac{3}{y^2 + x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial(\ln\mu)}{\partial\omega} = -\frac{3}{\omega}.$$

Проинтегрировав, получим $\mu(\omega) = \dfrac{1}{\omega^3}$, т. е. $\mu(x,\, y) = \dfrac{1}{\left(x + y^2\right)^3}$ $\left(x + y^2 \neq 0\right)$.

Запишем ДУ в полных дифференциалах, умножив исходное уравнение на $\mu(x,\, y) = \dfrac{1}{\left(x + y^2\right)^3}$:

$$\frac{3y^2 - x}{\left(x + y^2\right)^3}\,\mathrm{d}x + \frac{2y\left(y^2 - 3x\right)}{\left(x + y^2\right)^3}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой функции двух переменных $u(x,\, y)$, поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{3y^2 - x}{\left(x + y^2\right)^3}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y\left(y^2 - 3x\right)}{\left(x + y^2\right)^3}, \end{cases}$$

и общее решение ДУ запишется в виде $u(x,\, y) = C$. Проинтегрируем первое равенство по x, считая $y = \mathrm{const}$:

$$u(x,\, y) = \frac{1}{x + y^2} - \frac{2y^2}{\left(x + y^2\right)^2} + Y(y),$$

где $Y(y)$ — неизвестная функция. Найдём её, продифференцировав полученную функцию $u(x,\, y)$ по y и сравнив эту производную с известной функцией $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ (второе равенство).

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{6y}{(x+y^2)^2} + \frac{8y^3}{(x+y^2)^3} + Y'(y).$$

Получаем уравнение для $Y(y)$: $Y'(y) = 0$, значит, $Y(y) = C$, где $C \in \mathbb{R}^1$, и функция $u(x,\, y)$ принимает вид

$$u(x,\, y) = \frac{1}{x+y^2} - \frac{2y^2}{(x+y^2)^2} + C.$$

Тогда общее решение ДУ в полных дифференциалах

$$\frac{1}{x+y^2} - \frac{2y^2}{(x+y^2)^2} = C.$$

Для исходного уравнения к общему решению нужно добавить частное решение $x + y^2 = 0$, которое мы теряем при умножении на интегрирующий множитель. Итак, окончательный ответ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y^2} - \dfrac{2y^2}{(x+y^2)^2} = C, \\ x + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение задачи 6

$$2y' + x = 4\sqrt{y}.$$

Полагаем $z = \sqrt{y}$, тогда $y = z^2$, $y' = 2zz'$, $4zz' + x = 4z$, т. е. $z' = 1 - \dfrac{x}{4z}$ — однородное уравнение ($z \neq 0$).

Теперь полагаем $u = \frac{z}{x}$, тогда $z' = u'x + u$, $u'x + u = 1 - \dfrac{1}{4u}$ — уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{4u\,\mathrm{d}u}{4u^2 - 4u + 1} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \left(u - \frac{1}{2} \neq 0\right).$$

Интегрируя, находим общее решение уравнения

$$\ln|2u-1| - \frac{1}{2u-1} + \ln(cx) = 0 \quad (c \neq 0)$$

и $u = \dfrac{1}{2}$ — частное решение.

Возвращаемся к старой переменной и в формуле общего решения освобождаемся от логарифма:

$$\sqrt{y} = \frac{x}{2} + ce^{\frac{x}{2\sqrt{y}-x}},$$

где $c \in \mathbb{R}^1$, причём при $c = 0$ получаем частное решение $\sqrt{y} = \dfrac{x}{2}$.

Решение задачи 7

$$\left(xye^{-\frac{y}{x}} + y^2e^{-\frac{y}{x}} + x^3\right) \mathrm{d}x + x\left(xe^{-\frac{y}{x}} - ye^{-\frac{y}{x}} - y^2\right) \mathrm{d}y = 0.$$

Данное ДУ "похоже" на ДУ в полных дифференциалах.

$$M(x,\, y) = xye^{-\frac{y}{x}} + y^2e^{-\frac{y}{x}} + x^3,$$

$$N(x,\, y) = x^2e^{-\frac{y}{x}} - xye^{-\frac{y}{x}} - xy^2.$$

Однако, посчитав $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$, убеждаемся, что $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Попытаемся найти интегрирующий множитель.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = e^{-\frac{y}{x}}(y-x) + y^2.$$

$$N(x,\, y) = -x\left(e^{-\frac{y}{x}}(y-x) + y^2\right).$$

Значит, интегрирующий множитель есть функция, зависящая только от x.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{e^{-\frac{y}{x}}(y-x) + y^2}{-x\left(e^{-\frac{y}{x}}(y-x) + y^2\right)};$$

откуда следует, что

$$\frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x}; \quad \ln\mu = -\ln|x|; \quad \mu = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Умножив исходное уравнение на $\mu = \dfrac{1}{x}$, получим ДУ в полных дифференциалах

$$\left(ye^{-\frac{y}{x}} + \frac{y^2}{x}e^{-\frac{y}{x}} + x^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(xe^{-\frac{y}{x}} - ye^{-\frac{y}{x}} - y^2\right)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных $u(x,\, y)$, поэтому

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = ye^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y^2}{x}e^{-\frac{y}{x}} + x^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^{-\frac{y}{x}} - ye^{-\frac{y}{x}} - y^2, \end{cases}$$

и общее решение ДУ запишется в виде $u(x,\, y) = c$.

Проинтегрируем левую и правую части второго равенства по y, считая, что $x = \mathrm{const}$:

$$u(x,\, y) = x\int e^{-\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}y - \int ye^{-\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}y + \int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + xye^{-\frac{y}{x}} + Y(x),$$

где $Y(x)$ — некоторая неизвестная функция. Для её определения продифференцируем найденную функцию $u(x,\, y)$ по x и сравним с первым равенством:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ye^{-\frac{y}{x}} + \frac{y^2}{x}e^{-\frac{y}{x}} + Y'(x).$$

$$ye^{-\frac{y}{x}} + \frac{y^2}{x}e^{-\frac{y}{x}} + Y'(x) = ye^{-\frac{y}{x}} + \frac{y^2}{x}e^{-\frac{y}{x}} + x^2,$$

откуда $Y'(x) = x^2$. Значит, $Y(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$.

$$u(x,\, y) = \frac{y^3}{3} + \frac{x^3}{3} + xye^{-\frac{y}{x}} + c.$$

Общее решение исходного ДУ имеет вид

$$y^3 + x^3 + 3xye^{-\frac{y}{x}} = c.$$

Решение задачи 8

$$4xy'' - (y'')^2 = 4\left(y' + 1\right).$$

В уравнении отсутствует переменная y, поэтому делаем замену $z = y'$; $z' = y''$.

$$4xz' - (z')^2 = 4z + 4.$$

ДУ представляет собой квадратное уравнение относительно z', поэтому

$$z' = 2x \pm 2\sqrt{x^2 - z - 1}.$$

Полученное ДУ первого порядка сводится к ДУ с разделяющимися переменными с помощью замены

$$x^2 - z - 1 = u \quad \Rightarrow \quad z = x^2 - u - 1 \quad \Rightarrow \quad z' = 2x - u'.$$

После замены переменной получаем уравнение

$$u' = \pm 2\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad \pm\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = \mathrm{d}x \quad (u \neq 0) \quad \Rightarrow$$

$$\pm\sqrt{u} = x + c_1 \quad \Rightarrow \quad u = (x + c_1)^2;$$

$$z = x^2 - (x + c_1)^2 - 1.$$

После преобразований и переобозначения произвольной константы получим

$$z = 2c_1 x - c_1^2 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$y' = 2c_1 x - c_1^2 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$y = c_1 x^2 - c_1^2 x - x + c_2.$$

Рассмотрим случай, когда $u = 0$, тогда

$$z = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{3} - x + c.$$

Итак, решения ДУ:

$$y = c_1 x^2 - c_1^2 x - x + c_2,$$

$$3y = x^3 - 3x + c.$$

Решение задачи 9

$$x^2\left(2yy''-(y')^2\right)+2xyy'=0.$$

Это однородное относительно функции y и её производных уравнение. Полагаем $\dfrac{y'}{y}=z$, тогда $y'=yz$, $y''=y\left(z^2+z'\right)$. Подставляя выражения для y' и y'' в исходное уравнение и сокращая y^2, где $y=0$ — решение, получим

$$x^2z^2+2x^2z'+2xz=0.$$

Поделим уравнение на $2x^2$, где $x=0$ — решение ДУ, получим $z'+\dfrac{z}{x}=-\dfrac{z^2}{2}$ — уравнение Бернулли.

Используя подстановку Эйлера $z(x)=u(x)v(x)$, находим общее решение промежуточного уравнения

$$z=\frac{2}{x\left(\ln|x|+c_1\right)}.$$

$x=0$ — частное решение.

После возврата к старой переменной имеем

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x\left(\ln|x|+c_1\right)}.$$

Интегрируя ещё раз, получаем:

$$\ln|y|=2\ln|\ln|x|+c_1|+\ln c_2,\quad c_2\neq 0\quad\Rightarrow$$

$$y=c_2\left(\ln|x|+c_1\right)^2.$$

Решение $y=0$ входит в общее при $c_2=0$. $x=0$ — частное решение.

Решение задачи 10

$$y'=y^2-xy-x.$$

Это уравнение Риккати. Попытаемся найти одно из частных решений этого уравнения в виде $y=ax+b$.

$$(ax+b)'=(ax+b)^2-x(ax+b)-x\quad\Rightarrow$$

$$a = a^2x^2 + 2abx + b^2 - ax^2 - bx - x \quad \Rightarrow$$
$$x^2\left(a^2 - a\right) + x(2ab - b - 1) + b^2 - a = 0.$$

Из этого равенства получаем систему уравнений с неизвестными a и b:

$$\begin{cases} a^2 - a = 0, \\ 2ab - b - 1 = 0, \\ b^2 - a = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $a = 0$ или $a = 1$. Тогда из третьего уравнения находим $b = 0$ или $b = \pm 1$. Пары $a = 0$, $b = 0$ и $a = 1$, $b = -1$ не удовлетворяют второму уравнению. Поэтому решением системы будет пара $a = 1$, $b = 1$. Тогда $y_1 = x + 1$ есть частное решение уравнения Риккати. Замена $y = x + 1 + z$ приводит исходное ДУ к уравнению Бернулли:

$$z' - z(x + 2) = z^2.$$

Решаем его с помощью подстановки Эйлера: $z(x) = u(x)v(x)$.

$$u'v + uv' - uv(x + 2) = u^2v^2.$$

Отсюда

$$v' - v(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x};$$

$$u' = u^2 v; \quad \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = e^{\frac{x^2}{2} + 2x}\,\mathrm{d}x;$$

$$-\frac{1}{u} = \int e^{\frac{x^2}{2} + 2x}\,\mathrm{d}x + C; \quad u = \left(C - \int e^{\frac{x^2}{2} + 2x}\,\mathrm{d}x\right)^{-1}.$$

Общее решение заданного уравнения

$$y = x + 1 + e^{\frac{x^2}{2} + 2x}\left(C - \int e^{\frac{x^2}{2} + 2x}\,\mathrm{d}x\right)^{-1}; \quad y_1 = x + 1.$$

Решение задачи 11

$$6y''y^{IV} - 5\left(y'''\right)^2 = 0.$$

Рассмотрим два способа решения этого ДУ.

Способ 1

Положим $y'' = z$, тогда $y''' = z'$, $y^{IV} = z''$, и уравнение принимает вид

$$6zz'' - 5\left(z'\right)^2 = 0.$$

Это уравнение второго порядка, в котором отсутствует независимая переменная x. Полагая $z' = p$ и принимая z за новую независимую переменную, получим $z'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$ и новое уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$6zp'p - 5p^2 = 0 \quad (p \neq 0);$$

$$6zp' - 5p = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{5}{6}\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

отсюда $p = c_1 z^{\frac{5}{6}}$. Заменим p на z':

$$z' = c_1 z^{\frac{5}{6}}.$$

Интегрируем это уравнение:

$$z = \left(c_1 x + c_2\right)^6.$$

Заменим z на y'': $y'' = \left(c_1 x + c_2\right)^6$. Двукратное интегрирование даёт общее решение исходного уравнения

$$y = \left(c_1 x + c_2\right)^8 + c_3 x + c_4.$$

Рассмотрим случай $p = 0$, что равносильно уравнению $y''' = 0$, решение которого $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, $c \in \mathbb{R}^1$.

Способ 2

Преобразуем левую часть уравнения следующим образом:

$$6\left(y''y^{IV} - \left(y'''\right)^2\right) + \left(y'''\right)^2 = 0.$$

Разделим уравнение на $\left(y''\right)^2$, где $y'' \neq 0$:

$$6\frac{y''y^{IV} - \left(y'''\right)^2}{\left(y''\right)^2} + \left(\frac{y'''}{y''}\right)^2 = 0.$$

Первая дробь в левой части преобразованного уравнения есть производная от $\dfrac{y'''}{y''}$, поэтому уравнение можно переписать в более компактной форме:

$$6\left(\frac{y'''}{y''}\right)' + \left(\frac{y'''}{y''}\right)^2 = 0.$$

Полагаем $\dfrac{y'''}{y''} = z$. Тогда $6z' + z^2 = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными.

$$-\frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{\mathrm{d}x}{6} \quad (z \neq 0).$$

Интегрируя ДУ, получим

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{6}x + c_1.$$

Заменим z на $\dfrac{y'''}{y''}$:

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{6}{x + c_1} \quad \Rightarrow \quad (\ln y'')' = \frac{6}{x + c_1}.$$

После интегрирования получаем

$$\ln y'' = 6\ln|x + c_1| + \ln c_2,$$

$$y'' = (c_1 x + c_2)^6$$

(константы c_1 и c_2 переобозначены).

Далее действуем так же, как и при решении этого уравнения первым способом. Необходимо рассмотреть также случай $z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y''' = 0$.

Решение задачи 12

$$3y'y'' = e^y; \quad y|_{x=-3} = 0; \quad y'|_{x=-3} = 1.$$

Заметим, что в уравнении отсутствует независимая переменная x. Положим $y' = p$ и примем y за новую независимую переменную, тогда получим $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$ и уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$3p^2p' = e^y.$$

Интегрируем его:

$$p^3 = e^y + c_1 \quad \Rightarrow \quad (y')^3 = e^y + c_1.$$

Найдём c_1 из начальных данных:

$$1^3 = e^0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

ДУ упрощается: $y' = e^{\frac{y}{3}}$ — уравнение с разделяющимися переменными. После интегрирования получим

$$-3e^{-\frac{y}{3}} = x + c_2.$$

Определим c_2:

$$-3e^{-\frac{0}{3}} = -3 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0.$$

Итак, $-3e^{-\frac{y}{3}} = x$. Заметим, что $x < 0$, иначе выражение не имеет смысла.

Решение задачи 13

$$1 + yy' + y' \ln y' = xy'.$$

Введём параметр $p = y'$. Тогда заданное уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} y' = p, \\ 1 + yp + p \ln p = xp. \end{cases}$$

Разрешив второе уравнение системы относительно x, получаем, что

$$x = \frac{1}{p} + y + \ln p, \quad p \neq 0.$$

Найдя по этому выражению $\mathrm{d}x$ и подставив его в равенство $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}p}{p}\right) = 0.$$

Первая скобка обращается в нуль только при $p = 1$. Подставив $p = 1$ в формулу для x, получаем решение $y = x - 1$.

Приравнивая к нулю выражение второй скобки, получаем уравнение с разделяющимися переменными. Все его решения задаются формулой $\ln p + y = c$. Подставляя $p = e^{-y+c}$ в формулу для x, получаем решение

$$y = c + \ln(x - c), \quad x > c.$$

Дискриминантные кривые находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} + y + \ln p, \\ 0 = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}, \end{cases}$$

где второе уравнение получается дифференцированием по p первого уравнения. Исключая из этой системы параметр p, находим, что $y = x - 1$ задаёт дискриминантную кривую. Это единственный "кандидат" в особые решения нашего уравнения.

Так как $y = x - 1$ — решение уравнения, то для него остаётся проверить выполнение определения особого решения, то есть надо убедиться в том, что в каждой точке прямой $y = x - 1$ её касаются другие интегральные кривые исходного уравнения. Условия касания кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ в точке с абсциссой x_0 таковы: $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$, $\varphi'(x_0) = \psi'(x_0)$. Для решений $y = x - 1$ и $y = c + \ln(x - c)$ эти условия запишутся в виде

$$\begin{cases} x_0 - 1 = c + \ln(x_0 - c), \\ 1 = \dfrac{1}{x_0 - c}. \end{cases}$$

Из второго равенства находим $c = x_0 - 1$. Подставляя это значение c в первое уравнение, получим тождество

$$x_0 - 1 = x_0 - 1 + \ln(x_0 - x_0 + 1),$$

справедливое при всех x_0. Значит, при каждом x_0 прямая $y = x - 1$ в точке с абсциссой x_0 касается одной из кривых $y = c + \ln(x - c)$, а именно той кривой, для которой $c = x_0 - 1$. Следовательно, $y = x - 1$ — особое решение.

Качественное поведение интегральных кривых показано на рис. 2.

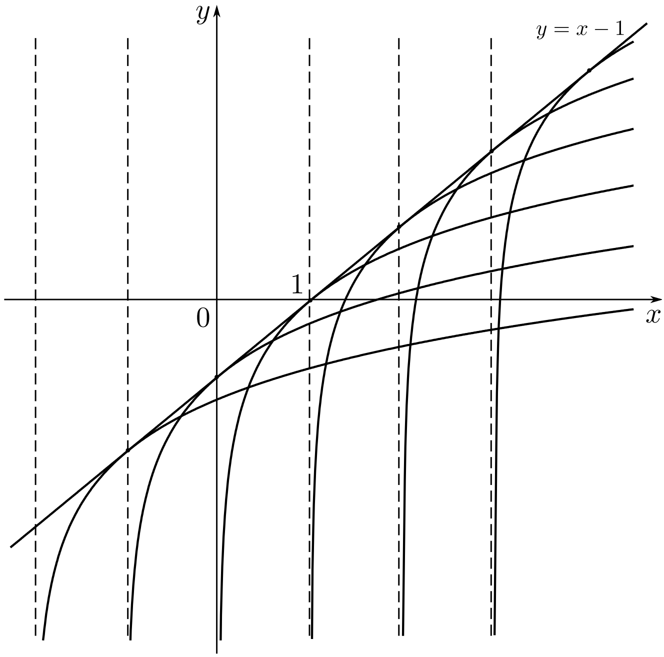


Рис. 2.

Решение задачи 14

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка кривой. Уравнение нормали кривой в точке M

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Тогда точка A пересечения нормали с осью абсцисс имеет координаты $A(x + yy'; 0)$, а середина B отрезка AM нормали — координаты $B\left(x + \frac{1}{2}yy'; \frac{y}{2}\right)$ (рис. 3).

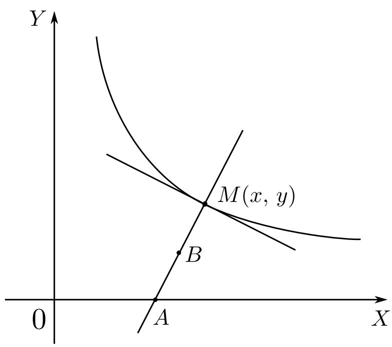


Рис. 3.

Точка B лежит на параболе $y^2 = ax$, и её координаты удовлетворяют уравнению параболы:

$$\frac{y^2}{4} = a\left(x + \frac{1}{2}yy'\right) \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{2a} = -\frac{2x}{y}.$$

Это уравнение Бернулли. Положив $y(x) = u(x)v(x)$, получим

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{uv}{2a} = -\frac{2x}{uv}.$$

Взяв в качестве функции $v(x)$ одно из решений уравнения $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{v}{2a}$, например, $v = e^{\frac{x}{2a}}$, определим $u(x)$ из уравнения $u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2xe^{-\frac{x}{a}}$.

$$u^2 = -4\int xe^{-\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = 4e^{-\frac{x}{a}}\left(a^2 + ax + ce^{\frac{x}{a}}\right).$$

Тогда $y^2 = 4\left(a^2 + ax + ce^{\frac{x}{a}}\right)$. Так как указанная кривая проходит через начало координат, то $0 = 4\left(a^2 + c\right)$, $c = -a^2$. Следовательно, уравнение кривой

$$y^2 = 4ax + 4a^2\left(1 - e^{\frac{x}{a}}\right).$$

Решение задачи 15

Из вопроса, поставленного в задаче, следует, что в качестве неизвестной функции должна быть взята скорость движения капли в зависимости от времени. Обозначим её через $v(t)$ и заметим, что $v(0) = 0$. Надо учесть, что масса капли M также является переменной величиной, зависящей от времени t, и действующая на каплю равнодействующая всех внешних сил равна $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv)$. Составим ДУ:

$$\frac{\mathrm{d}(Mv)}{\mathrm{d}t} = P + F_{\text{сопр}},$$

где P — сила тяжести, $F_{\text{сопр}}$ — сила сопротивления, действующая на каплю во время её движения.

Из условия задачи масса капли в момент времени t: $M(t) = M_0 - mt$, тогда

$$P(t) = M(t)g = (M_0 - mt)g;$$

$$F_{\text{сопр}} = -kv(t), \quad k > 0.$$

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}\left(v(M_0 - mt)\right)}{\mathrm{d}t} = (M_0 - mt)\,g - kv \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g + \frac{v(m-k)}{M_0 - mt}.$$

С учётом начального условия получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \dfrac{v(m-k)}{M_0 - mt} = g, \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

ДУ является линейным первого порядка относительно $v(t)$ и решается с помощью подстановки Эйлера. Общее решение имеет вид

$$v(t) = c\,(M_0 - mt)^{\frac{k}{m}-1} - \frac{g}{2m-k}\,(M_0 - mt)\,,$$

где c — произвольная константа. Находим c, используя начальное условие:

$$c = \frac{gM_0^{2-\frac{k}{m}}}{2m-k}.$$

Записываем решение задачи

$$v(t) = \frac{g}{2m-k}\,(M_0 - mt)\left(\left(1 - \frac{m}{M_0}t\right)^{\frac{k}{m}-2} - 1\right).$$

Из ответа видно, что надо исключить случай, когда коэффициент пропорциональности k равен $2m$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В.** Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов / Под ред. Зарубина В. С., Крищенко А. П. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. — 336 с.
2. **Богданов Ю. С., Мазаник С. А., Сыроид Ю. Б.** Курс дифференциальных уравнений: учеб. пособие. Мн.: Унiверсiтэцкае, 1996. — 287 с.
3. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. — 576 с.
4. **Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Едиториал УРСС, 2002. — 256 с.
5. **Матвеев Н. М.** Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. Мн.: Вышэйш. шк., 1987. — 319 с.
6. **Романко В. К., Агаханов Н. Х., Власов В. В., Коваленко Л. И.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. — 256 с.
7. **Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А.** Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989. — 383 с.
8. **Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.** Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов. М: Наука, Физматлит, 1998. — 232 с.
9. **Филиппов А. Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособие. М.: Наука, 1985. — 128 с.
10. **Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учеб. М.: Наука, 1969. — 424 с.

Оглавление

Учебное издание

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Часть 1

ПАВЛОВА Галина Александровна,
ГОРБУНОВ Сергей Владимирович

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 3.09.2012
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,00. Уч.–изд. л. 2.95
Тираж 80 экз. Рег. №153/12

Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус № 8.